

Trois méthodes de mesures d'impédances avec un analyseur de réseau vectoriel (VNA).

Mesures du coefficient de self-induction de bobines et de la capacité de condensateurs en radiofréquence (HF, VHF, UHF, SHF).

Introduction

Les mesures des valeurs du coefficient de self-induction des bobines ou celles de la capacité des condensateurs peuvent sembler être relativement faciles à effectuer avec les petits appareils bon marché qui sont à disposition chez beaucoup de radioamateurs. Il s'agit de LCR-mètres miniatures disponibles à partir de quelques dizaines d'Euros en 2020. Ces petits appareils de mesure sont bien utiles pour relever les valeurs de composants courants en électronique. Toutefois, l'étendue de mesure de ces appareils est relativement limitée, en particulier pour les très petites valeurs de bobines (par ex. de l'ordre de 50 nH) ou de condensateurs (par ex. de l'ordre de 5 pF). En outre, les relevés des valeurs mesurées s'effectuent à des fréquences relativement faibles (par ex. de l'ordre de 10 kHz à 100 kHz) avec ces petits appareils.

Les comportements des bobines et des condensateurs révèlent quelques surprises en radiofréquences. En effet, une bobine peut résonner elle-même à une fréquence particulière (SRF : *Self Resonant Frequency*) à cause des capacités parasites entre spires ; il en est de même en ce qui concerne un condensateur qui peut se comporter comme une véritable bobine de self-induction pour les fréquences au-delà de la SRF de ce condensateur.

La qualité de fabrication des bobines et des condensateurs devient critique en radiofréquence ; cette qualité doit être adaptée à la gamme de fréquence sous laquelle ces composants vont être utilisés. Il en est de même en ce qui concerne l'amplitude des signaux qui vont être appliqués aux bornes de ces composants. Les composants présents dans un récepteur sont parfois de très petite taille, en revanche, ceux qui sont intégrés dans les émetteurs, parfois très puissants, sont d'une taille adaptée à ce type d'utilisation. On prendra pour exemple les condensateurs variables à large inter-lames et les bobines constituées de conducteurs à forte section, composants qui sont utilisés dans les circuits d'accord des amplificateurs linéaires ou ceux des *Antenna Tuners*.

Une bobine ou un condensateur devrait idéalement présenter une valeur intrinsèque (coefficient de self-induction pour une bobine ou capacité pour un condensateur) la plus constante possible dans la gamme de fréquence où ce composant va être utilisé. La valeur de l'impédance (réactance) du composant est bien entendu fonction de la fréquence du signal qui lui est appliqué :

$$X_L = j\omega L$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Jusque-là, tout va bien dans le meilleur des mondes ...

Contenu de cet article technique

Cet article comprend quatre parties qui sont ciblées sur l'utilisation d'un analyseur de réseau vectoriel (VNA *Vector Network Analyzer*) avec des connaissances pré-requises de l'abaque de Smith pour la mesure de bobines de self-induction et de condensateurs en radiofréquences :

1. Description simplifiée d'un analyseur de réseau vectoriel, comparaison avec un analyseur scalaire et bref rappel sur les paramètres de répartition (de diffraction) : *Scattering Parameters*, en abrégé *S-Parameters* (paramètres S).
2. Description des trois méthodes des mesures d'impédances, de la capacité d'un condensateur et du coefficient de self-induction d'une bobine au moyen d'un VNA en radiofréquences. Quelle méthode de mesure utiliser en fonction de l'ordre de grandeur de la valeur d'impédance du composant dans la gamme de fréquences du signal. Analyse mathématique des méthodes au moyen des paramètres de répartition : *S-Parameters* S_{11} *1-Port Shunt*, S_{21} *2-Ports Shunt-Thru* et S_{21} *2-Ports Series-Thru*. Analyse mathématique de la précision de mesure selon les méthodes adaptées respectivement à l'ordre de grandeur des impédances mesurées.
3. Simulation du degré de précision atteint lors de la mesure d'impédance selon les trois méthodes au moyen du logiciel SimSmith Ver. 17.0 q de AE6TY, avec une application décrite par W0QE dans une de ses vidéos tutoriels. L'application logicielle de W0QE sera largement complétée par ON4IJ au moyen d'un bloc fonctionnel supplémentaire avec l'encodage de plusieurs lignes de syntaxe (formules mathématiques développées dans la deuxième partie).
4. Pratique de mesures illustrées au moyen d'un analyseur de réseau vectoriel HP 8753C avec un *S-Parameter Test Set* HP 85047A et un kit de calibrage HP 85032B.



Fig. 1 : LCR-mètre et ESR-mètre.
Photo : ON4IJ.



⇔ Fig. 2 : Analyseur de réseau vectoriel HP 8753C.
Photo : ON4IJ.

Des petits LCR-mètres comparés à un analyseur de réseau vectoriel massif ...

La mesure des bobines de faibles valeurs de coefficient de self-induction (quelques nH) devient possible sous un signal radiofréquence en ayant recours à un analyseur de réseau vectoriel. Mesurer le coefficient de self-induction d'une bobine de 3 spires, d'un diamètre de 5 mm et d'une longueur de 12 mm à une fréquence de 145 MHz est incompatible (impossible) avec des petits LCR-mètres.

Il existe toutefois des LCR-mètres professionnels QSJ+++ (Keysight E4982A Opt. 300 : ± 45.000,00 €) permettant de mesurer tous les paramètres des composants passifs (bobines, condensateurs, résistances) sous un signal radiofréquence. Un tel appareil LCR professionnel est inabordable pour un radioamateur. Ainsi, rien de tel que d'avoir recours à un VNA de seconde main à prix OM et qui ne dépasse pas le prix d'un bon *transceiver* ! En outre, un VNA vous permettra de multiples possibilités de mesures dans votre activité technique de radioamateur (filtres, antennes, adaptations d'impédances, etc.). Un VNA ou un mini VNA est donc un excellent investissement pour un radioamateur passionné de technique radio.

Lorsqu'un OM a un projet de réalisation d'un filtre pour un récepteur ou un projet d'un circuit d'adaptation d'antenne, la valeur des condensateurs ne pose en général pas trop de problème pour des composants de qualité adaptée à la HF (Haute Fréquence) : il suffit de lire la valeur sur le composant et d'y faire confiance. Nous verrons que cette valeur peut devenir très différente en radiofréquence par rapport à celle qui est indiquée sur le composant.

Aussi, lorsqu'un OM doit bobiner du fil pour obtenir une bobine d'un coefficient de self-induction bien déterminé, la tâche devient bien plus ardue, en particulier en VHF, UHF et SHF. Pourtant, il existe de nombreuses formules et applications logicielles qui permettent de calculer la valeur du coefficient de self-induction d'une bobine en fonction de différentes grandeurs géométriques de celle-ci (nombre de spires, diamètre de la bobine, longueur de la bobine, espacement entre spires, diamètre du fil, nombre de couches de fil bobiné, rapport du diamètre par rapport à la longueur de la bobine, etc.). On s'aperçoit très vite qu'autant de formules (pour la plupart simplifiées) et autant de logiciels utilisés donnent autant de valeurs différentes en ce qui concerne le coefficient de self-induction d'une même bobine aux mêmes dimensions géométriques.

Les valeurs des capacités et celles des bobines de self-induction deviennent critiques pour la mise au point de filtres HF. En effet : si le filtre comporte des circuits résonnants que l'on peut éventuellement accorder, le rapport entre la capacité et le coefficient de self-induction doit respecter les calculs du filtre. Ceci est essentiel non seulement pour obtenir une bande passante linéaire avec une ou deux fréquences de coupure, pour obtenir une réjection optimale hors bande, pour présenter le minimum de pertes d'insertion dans la bande passante, mais aussi pour obtenir une adaptation parfaite avec l'impédance caractéristique du système dans lequel ce filtre est inséré (en général 50 Ω). Un filtre avec des caractéristiques de transmission de rêve mais hélas avec une piètre adaptation d'impédance à son entrée et à sa sortie (*SWR*, *ROS* élevé) peut se révéler peu efficace dans l'utilisation pour laquelle il est destiné.

1^{ère} partie : Description simplifiée d'un analyseur de réseau vectoriel

Comparaison entre un analyseur scalaire et un analyseur vectoriel

Un analyseur de réseau vectoriel permet de mesurer le coefficient de réflexion complexe présent à l'entrée et à la sortie d'un circuit électronique constitué d'un seul ou de plusieurs composants associés. Ce circuit électronique est appelé « réseau ». Un analyseur de réseau vectoriel permet aussi de mesurer le coefficient de transmission complexe du circuit électronique. Contrairement à un analyseur scalaire qui ne peut mesurer que la magnitude (amplitude) d'un signal, un analyseur vectoriel permet, entre autres, de mesurer l'évolution de la phase et du délai de groupe dans le réseau sous test (DUT *Device Under Test*, dispositif sous test). Un analyseur scalaire ne peut mesurer que le module ($\rho = |\Gamma|$) du coefficient de réflexion (à condition d'utiliser un coupleur directionnel). Un analyseur vectoriel permet de mesurer le coefficient de réflexion complexe $\Gamma = \rho \angle \theta = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ avec son module et son argument (phase ou

angle). Un analyseur scalaire ne peut mesurer que le module d'une impédance $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ (à condition d'utiliser un coupleur directionnel). Enfin, un analyseur vectoriel permet de mesurer une impédance complexe en coordonnées cartésiennes (rectangulaires) $Z = R + jX$ en donnant la partie réelle R (partie résistive) et la partie imaginaire X (partie réactive) ou en coordonnées polaires $Z = \rho \angle \theta = \rho (\cos \theta + j \sin \theta)$ en donnant son module ρ et son argument (angle de phase) $\theta = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$, parfois noté $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$ (fonction inverse de la tangente).

L'aptitude d'un analyseur de réseau vectoriel à mesurer les impédances complexes va donc nous permettre de mesurer la réactance pure d'un condensateur ou celle d'une bobine de self-induction dans une gamme de fréquence donnée. On pourra donc mesurer la capacité d'un condensateur ou le coefficient de self-induction d'une bobine.

Quels sont les « principes actifs » d'un analyseur de réseau vectoriel ?

Le « maître-mot » est : comparaison. La comparaison entre quoi et quoi, et pour quel type de mesure ?

Si l'on compare à un port 1 de l'entrée d'un réseau le signal incident avec le signal réfléchi par cette entrée, alors on obtient le coefficient de réflexion complexe « Γ » à l'entrée du réseau et à partir duquel on peut en déduire les pertes de retour (*Return Loss*), le ROS (*SWR*), l'impédance complexe présente à l'entrée du réseau et le paramètre de répartition – voir plus loin dans le texte – S_{11} (*S-Parameters*) .

Si l'on compare le signal incident au port 1 à l'entrée du réseau avec le signal transmis à sa sortie au port 2 raccordé sur une charge adaptée, alors on obtient le coefficient de transmission « T » et à partir duquel on peut en déduire le gain ou les pertes d'insertion du réseau, la relation de phase entre le signal d'entrée et celui de la sortie, le délai de groupe et le paramètre de répartition S_{21} .

En d'autres mots, c'est très simple par analogie :

Un analyseur scalaire permet de mesurer une grandeur à une seule dimension, comme par exemple l'unité de longueur (distance entre Paris et Bruxelles). Un analyseur vectoriel permet de mesurer une grandeur à deux dimensions qui sont corrélées entre-elles comme par exemple une unité de surface tout en donnant des informations distinctes sur les deux grandeurs de longueurs qui ont permis de déterminer la surface par calcul (longueur et largeur multipliées entre elles).

En effet, si l'on veut mesurer la surface d'un champ agricole de forme géométrique rectangulaire, il faut mesurer la longueur (amplitude ou partie résistive) et la largeur (phase ou partie réactive). En multipliant la longueur par la largeur, on obtient la surface. Tout se passe comme si un analyseur scalaire donnait uniquement l'information sur la valeur de la surface (module d'une impédance) sans donner le détail des valeurs de la longueur (résistance) et de la largeur (réactance). Le champ agricole est-il d'une forme très allongée ou d'une forme se rapprochant d'un carré ? Un analyseur scalaire est incapable de le déterminer : il ne donne qu'une seule information, c'est-à-dire la surface du champ agricole (module de l'impédance).

Un analyseur vectoriel va être capable de donner non seulement la surface du champ agricole, mais aussi sa longueur et sa largeur d'où on pourra en déduire le rapport entre la longueur et la largeur de ce champ. Ceci va nous permettre de dire si le champ est d'une forme allongée (résistance et forte réactance) ou bien si ce champ se rapproche d'une forme carrée (résistance presque pure avec une faible réactance). Toute analogie a ses limites.

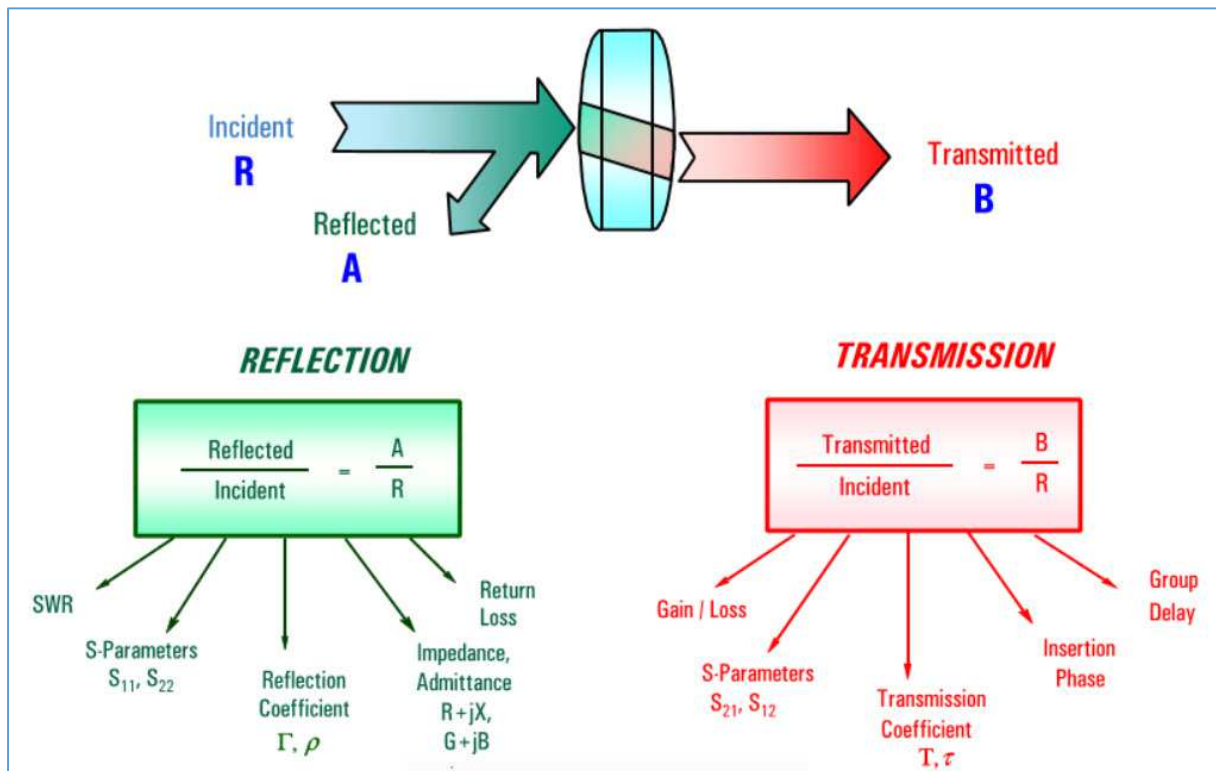


Fig. 3 : Caractéristiques d'un réseau radiofréquence. Source : Agilent Technologies, Network Analyzer Basics, Joel Dunsmore, USA 2007.

Comment un analyseur vectoriel parvient-il à comparer des signaux en termes d'amplitudes et de phases ?

Un analyseur vectoriel (tout comme un analyseur scalaire) dispose d'un générateur de signaux radiofréquences (appelé source) et qui va permettre d'appliquer un signal à l'entrée du réseau pour le « stimuler ». Ce générateur, du type à synthétiseur de fréquence, est piloté en fréquences par une base de temps permettant ainsi un balayage en fréquences.

Dans un analyseur scalaire, il n'y a qu'un seul récepteur (par exemple sous la forme d'un analyseur de spectre) qui permet de mesurer une seule grandeur : l'amplitude du signal transmis ou l'amplitude du signal réfléchi (au moyen d'un coupleur directionnel). La fréquence du générateur et la fréquence d'accord du récepteur sont synchronisées avec le balayage en fréquence (*Tracking*, générateur suiveur de l'accord en fréquence du récepteur). L'analyse scalaire s'établit sur la comparaison entre l'amplitude du signal du générateur et l'amplitude du signal reçu, soit à la sortie du réseau (signal transmis) soit à la sortie d'un coupleur directionnel placé à l'entrée du réseau. Il n'y a aucun suivi de phase dans un analyseur scalaire.

Dans un analyseur vectoriel, il y a au moins trois récepteurs (parfois quatre). Le premier récepteur mesure le signal du générateur (récepteur « R », signal de référence), le deuxième récepteur mesure le signal réfléchi à l'entrée du réseau (récepteur « A », signal réfléchi), le troisième récepteur mesure le signal transmis à la sortie du réseau (récepteur « B », signal transmis). Les récepteurs « A » et « B » sont capables de mesurer des amplitudes de signaux mais sont aussi capables de mesurer des phases relatives à celle qui est mesurée par le récepteur « R » de référence. Tout se passe comme si un analyseur vectoriel était composé d'un générateur à balayage de fréquences qui est synchronisé avec trois analyseurs de spectre.

C'est très simple, une autre analogie :

Vous êtes habitués à utiliser un oscilloscope double trace. Pourquoi utiliser un oscilloscope double trace ? La première trace mesure le signal injecté par un générateur à l'entrée d'un réseau (filtre, amplificateur, etc.) et la deuxième trace mesure le signal obtenu à la sortie de ce réseau. En observant les deux traces sur l'écran de l'oscilloscope, on peut comparer non seulement les amplitudes des signaux entre l'entrée et la sortie du réseau, mais aussi la phase entre le signal d'entrée et celle de la sortie du réseau. En faisant varier la fréquence du générateur, on peut observer l'évolution du rapport des amplitudes et celle du rapport de phase entre l'entrée et la sortie du réseau. Un raffinement consiste à utiliser la sortie « synchronisation » du générateur pour piloter, par l'entrée externe du déclencheur (*Trigger*), le démarrage du balayage de la base de temps de l'oscilloscope.

Ainsi, tout se passe comme si un analyseur vectoriel était comme un « scope » à triple trace avec synchronisation de base de temps, mais cette fois-ci dans le domaine de la fréquence à la place du domaine du temps. Trois traces dans un oscilloscope, c'est-à-dire trois récepteurs de mesure dans un analyseur vectoriel.

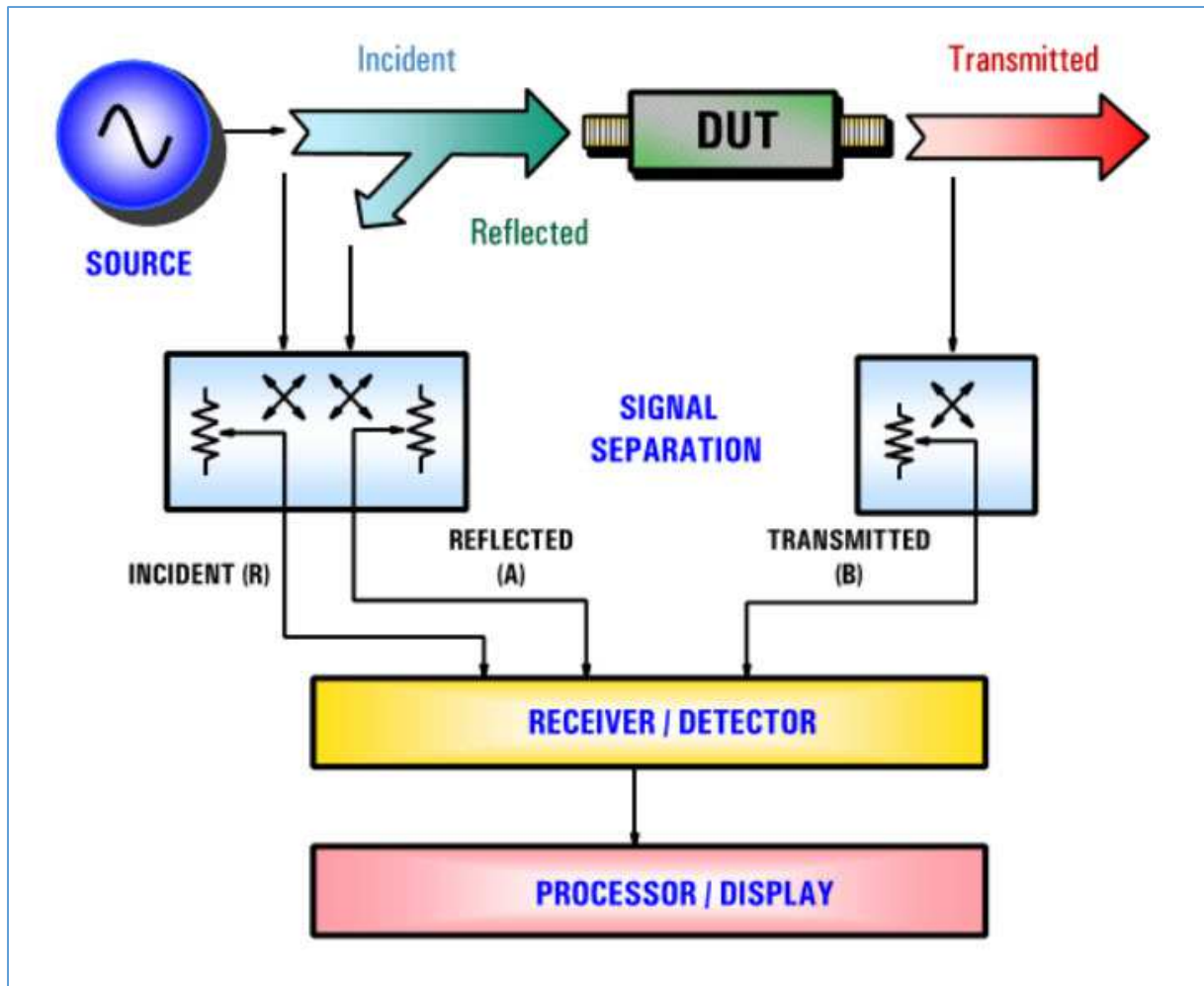


Fig. 4 : Architecture d'un analyseur de réseau vectoriel en schéma-bloc avec trois récepteurs de mesure. Source : Agilent Technologies, Network Analyzer Basics, Joel Dunsmore, USA 2007.

Comment mesurer exclusivement le signal incident, le signal réfléchi et le signal transmis ?

Dans une ligne de transmission, l'organe qui est capable de mesurer exclusivement une onde incidente (*Forward*, onde directe) en discriminant une onde réfléchie (*Reflected*) et *vice versa* est un coupleur directionnel.

C'est ainsi qu'un analyseur vectoriel dispose de trois coupleurs directionnels. Le premier coupleur directionnel mesure exclusivement le signal incident injecté par le générateur (signal de référence). Le deuxième coupleur directionnel (orienté en sens inverse à l'entrée du dispositif sous test) mesure exclusivement le signal réfléchi par l'entrée du DUT (dispositif sous test, c'est-à-dire le réseau à analyser). Le troisième coupleur directionnel mesure exclusivement le signal (onde directe) qui est issu de la sortie du DUT et qui est dirigé vers une charge adaptée.

S-Parameter Test Set :

L'art de transformer un appareil à quatre connecteurs en un appareil avec deux seuls connecteurs. Un analyseur vectoriel dispose de quatre connecteurs sur la face avant de l'appareil :

- Sortie du générateur source « RF OUT » ;
- Entrée de mesure « R » du signal de référence, onde incidente ;
- Entrée de mesure « A » du signal de l'onde réfléchié ;
- Entrée de mesure « B » du signal de l'onde transmise.



Fig. 5 : Illustration des quatre connecteurs de raccordement sur la face avant d'un analyseur de réseau vectoriel. Photo : ON4IJ.

On adjoint à l'analyseur vectoriel un appareil supplémentaire : un *S-Parameter Test Set*, c'est-à-dire un dispositif de test permettant de relever les paramètres de répartition. Cet appareil est constitué essentiellement de trois coupleurs directionnels et d'un relais inverseur coaxial. Le *S-Test Set* est lui aussi équipé de quatre connecteurs pour être raccordé à ceux de l'analyseur vectoriel. L'appareil dispose de deux connecteurs supplémentaires appelés ports de mesure : Port 1 et Port 2.



Fig. 6 : Illustration des quatre raccordements entre le *S-Parameter Test Set* et l'analyseur de réseau vectoriel. En bas à gauche du cliché, on peut observer les connecteurs des deux ports de mesure. Photo : ON4IJ.

Dans le schéma-bloc qui suit, on peut suivre le trajet du signal depuis le générateur (RF IN) vers le port 1 de mesure. Un coupleur directionnel prélève une partie du signal incident du générateur pour l'envoyer vers l'entrée « R ». Un deuxième coupleur permet de prélever le signal réfléchi au port 1 par l'entrée du DUT et l'envoyer vers l'entrée « A ». Un troisième coupleur permet de prélever le signal transmis par la sortie du DUT arrivant au port 2 et de l'envoyer vers l'entrée « B ». Le DUT est raccordé entre le port 1 et le port 2.

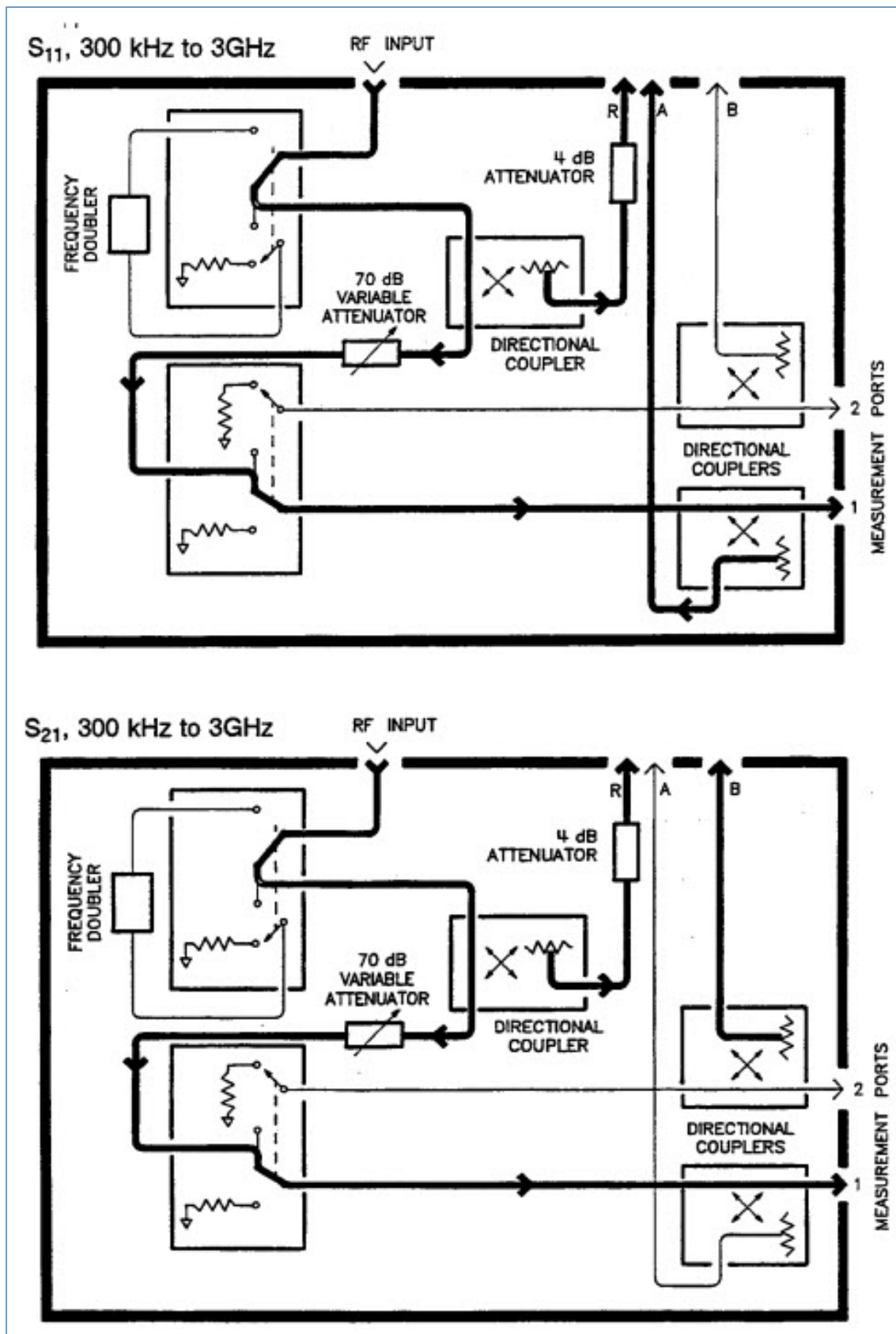


Fig. 7 : Schéma-bloc d'un *S-Parameter Test Set* HP 85047A. On peut suivre le trajet du signal depuis « RF IN » vers « A » pour une mesure du signal réfléchi par le DUT (S_{11}) et le trajet du signal depuis « RF IN » vers « B » pour une mesure du signal transmis par le DUT (S_{21}). Source : Operating and service manual HP 85047A, Agilent Technologies, 85047-90004, USA July 1996.

Il est à remarquer sur le schéma-bloc de la figure précédente que la sortie du DUT est raccordée au port 2 et que ce dernier va en ligne droite vers une charge adaptée de 50Ω . L'entrée du DUT est chargée par l'impédance interne du générateur qui elle aussi est adaptée à 50Ω .

Un relais coaxial permet d'inverser les deux ports de mesure afin d'inverser le sens du signal à travers le DUT. L'inversion du signal permet de mesurer le signal réfléchi S_{22} à la sortie du DUT pour en déduire l'impédance de sortie. Ceci permet enfin une mesure de la transmission inverse S_{12} pour en déduire l'isolation de rétroaction HF du DUT. Le relais coaxial permet donc d'éviter de déconnecter le DUT, de le retourner et de le reconnecter pour effectuer ces deux derniers types de mesures.

Les VNA modernes ont en général le S-Parameter Test Set qui est directement intégré dans l'appareil. Certains équipements ne sont même plus équipés d'un écran car celui-ci est substitué par celui d'un ordinateur portable.

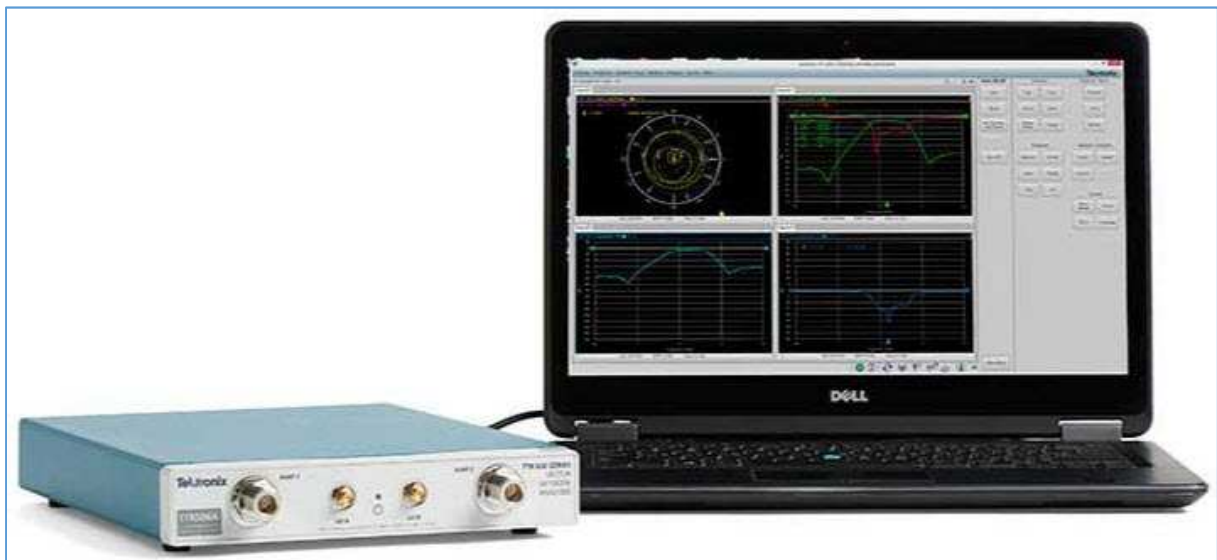


Fig. 8 : Analyseur de réseau vectoriel Tektronix TTR506A (100 kHz – 6 GHz) QSJ 13.000,00 €. Source : Tektronix.



Fig. 9 : Analyseur de réseau vectoriel VNWA 3EC (1,3 GHz) QSJ 600,00 €. Source : SDR-Kits, Thomas Baier DG8SAQ.

Il ne faut pas oublier d'effectuer un calibrage utilisateur du VNA dans les conditions de mesure au moyen d'un kit de calibrage ; *SOLT* : *Short, Open, Load, Thru*.

Brefs rappels sur les paramètres de répartition S

Si vous connaissez déjà parfaitement ce sujet, vous pouvez passer directement à la lecture de la 2^{ème} partie.

Les paramètres S (*Scattering Parameters*) permettent d'effectuer des mesures d'impédance complexe par rapport à une impédance standard de référence et permet aussi d'effectuer les mesures des coefficients de transmission et de réflexion aux bornes d'un réseau inséré dans une ligne de transmission dans des conditions de source et de charge d'impédance standard de référence Z_0 (50 Ω).

S_{11} : réflexion à l'entrée du DUT ;

S_{21} : transmission de l'entrée vers la sortie du DUT ;

S_{22} : réflexion à la sortie du DUT ;

S_{12} : transmission inverse du DUT (de la sortie vers l'entrée ; isolation HF).



Fig. 10 : Modèle d'un réseau à deux ports avec les variables a_1 et a_2 d'ondes incidentes ainsi que les variables d'ondes réfléchies b_1 et b_2 . Graphisme ON4IJ.

Les variables a_1 , a_2 , b_1 , b_2 (pour un réseau à deux ports) et leurs interrelations avec les paramètres S ont été définies en 1965 par le Dr. Kaneyuki Kurokawa de l'Université de Tokyo, membre de l'IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*). Les variables a_1 et b_1 représentent des tensions exprimées en valeurs complexes normalisées d'ondes incidentes vers le 1^{er} port et réfléchies à partir du 1^{er} port d'un réseau. Ces variables représentent donc d'une part la stimulation (injection d'un signal) d'un réseau (variable indépendante a_1) et la réponse du réseau à cette stimulation (variable dépendante b_1). Les variables sont définies en termes de tension V_1 , de courant I_1 aux bornes du réseau et d'une impédance arbitraire de référence Z_0 . Il en va de même pour les valeurs a_2 et b_2 .

On en déduit les relations suivantes sous forme de combinaisons linéaires :

$$b_1 = S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2$$

$$b_2 = S_{21} \cdot a_1 + S_{22} \cdot a_2$$

Ces relations mathématiques peuvent sembler abstraites, mais cela devient plus concret lorsqu'on exprime les variables en termes de tensions V et courants I qui se répartissent dans le réseau.

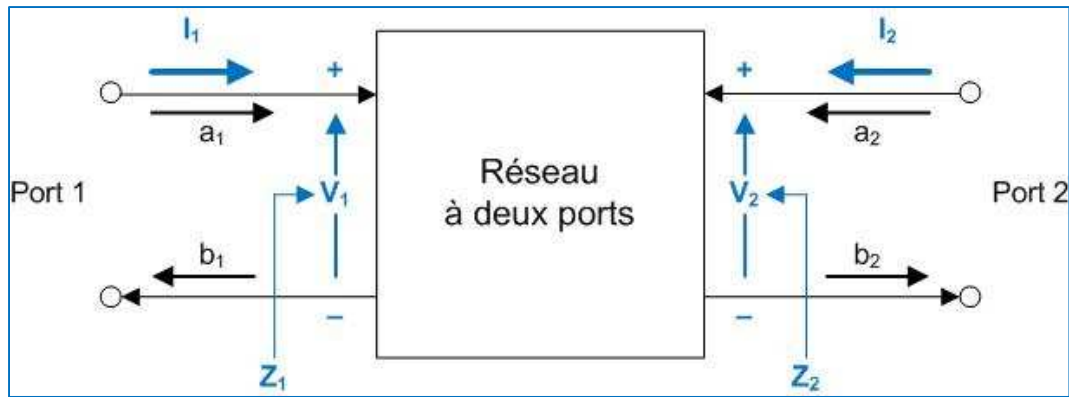


Fig. 11 : Modèle d'un réseau à deux ports avec tensions V_1 V_2 et courants I_1 I_2 d'ondes incidentes et réfléchies. Graphisme ON4IJ.

Les variables indépendantes a_1 et a_2 sont les tensions d'ondes incidentes normalisées.

$$a_1 = \frac{V_1 + I_1 \cdot Z_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\text{Tension d'onde incidente au port 1}}{\sqrt{Z_0}}$$

$$a_2 = \frac{V_2 + I_2 \cdot Z_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\text{Tension d'onde incidente au port 2}}{\sqrt{Z_0}}$$

Les variables dépendantes b_1 et b_2 sont les tensions d'ondes réfléchies normalisées.

$$b_1 = \frac{V_1 - I_1 \cdot Z_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\text{Tension d'onde réfléchie au port 1}}{\sqrt{Z_0}}$$

$$b_2 = \frac{V_2 - I_2 \cdot Z_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\text{Tension d'onde réfléchie au port 2}}{\sqrt{Z_0}}$$

Lorsque le dispositif sous test est raccordé à une source d'impédance interne standard de référence Z_0 et est raccordé à une charge standard de référence Z_0 , on peut facilement extraire les paramètres S des quatre relations indiquées ci-dessus. Par exemple, lorsque l'impédance caractéristique est $Z_0 = 50 \Omega$ et si une charge de 50Ω est raccordée au port 2 du dispositif sous test, alors $a_2 = 0$ et on peut extraire des deux combinaisons linéaires les valeurs des paramètres S_{11} et S_{21} . Le même principe peut être appliqué dans l'autre sens : si $a_1 = 0$, alors on peut extraire les valeurs des paramètres S_{22} et S_{12} .

Les paramètres S

$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$ Coefficient de réflexion à l'entrée avec le port de sortie raccordé sur une charge adaptée ($Z_L = Z_0$ donne $a_2 = 0$). Z_L = impédance de charge.

$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$ Coefficient de réflexion à la sortie avec le port d'entrée raccordé sur une charge adaptée ($Z_S = Z_0$ et $V_S = 0$ donne $a_1 = 0$). Z_S = impédance de source ; V_S : tension de la source.

$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$ Coefficient de transmission direct (gain, atténuation) avec le port de sortie raccordé sur une charge adaptée ($a_2 = 0$).

$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$ Coefficient de transmission inverse (isolation) avec le port d'entrée raccordé à une charge adaptée ($a_1 = 0$).

Relations entre les paramètres S, les impédances Z et le coefficient de réflexion Γ

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{V_1 - I_1 \cdot Z_0}{V_1 + I_1 \cdot Z_0} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - Z_0}{\frac{V_1}{I_1} + Z_0} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \Gamma_1 \text{ à l'entrée du DUT}$$

$$Z_1 = Z_0 \frac{(1 + S_{11})}{(1 - S_{11})} = Z_0 \frac{(1 + \Gamma_1)}{(1 - \Gamma_1)}$$

où $Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$ est l'impédance d'entrée du DUT vue au port 1

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{V_2 - I_2 \cdot Z_0}{V_2 + I_2 \cdot Z_0} = \frac{\frac{V_2}{I_2} - Z_0}{\frac{V_2}{I_2} + Z_0} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \Gamma_2 \text{ à la sortie du DUT}$$

$$Z_2 = Z_0 \frac{(1 + S_{22})}{(1 - S_{22})} = Z_0 \frac{(1 + \Gamma_2)}{(1 - \Gamma_2)}$$

où $Z_2 = \frac{V_2}{I_2}$ est l'impédance de sortie du DUT vue au port 2

2^{ème} partie : Description des trois méthodes de mesures d'impédances avec un VNA

Ce qui est décrit dans cette partie a été inspiré à partir de plusieurs publications sur ce sujet, entre autres dans la revue Microwave&RF, et dont l'auteur est BRIAN WALKER, Senior RF Design Engineer à la société Copper Mountain Technologies, Indianapolis, IN, USA.

Dans ce qui va suivre, nous allons ajouter tout un parcours de raisonnement pour retrouver d'où viennent les formules mathématiques mentionnées par Brian Walker dans sa publication. C'est donc intentionnellement que nous avons inclus un rappel sur les paramètres S dans la première partie de cet article.

L'idée de rédaction de cet article nous est venue après le visionnage d'une vidéo sur Youtube : *How to determine the value of a capacitor or inductor using a network analyzer* (auteur : TimVT971). Vous pouvez trouver cette vidéo ici :

<https://www.youtube.com/watch?v=scwgbxWHTQI>

Trois méthodes :

1. Configuration n° 1 : *1-Port Shunt* ;
2. Configuration n° 2 : *2-Ports Shunt-Thru* ;
3. Configuration n° 3 : *2-Ports Series-Thru*.

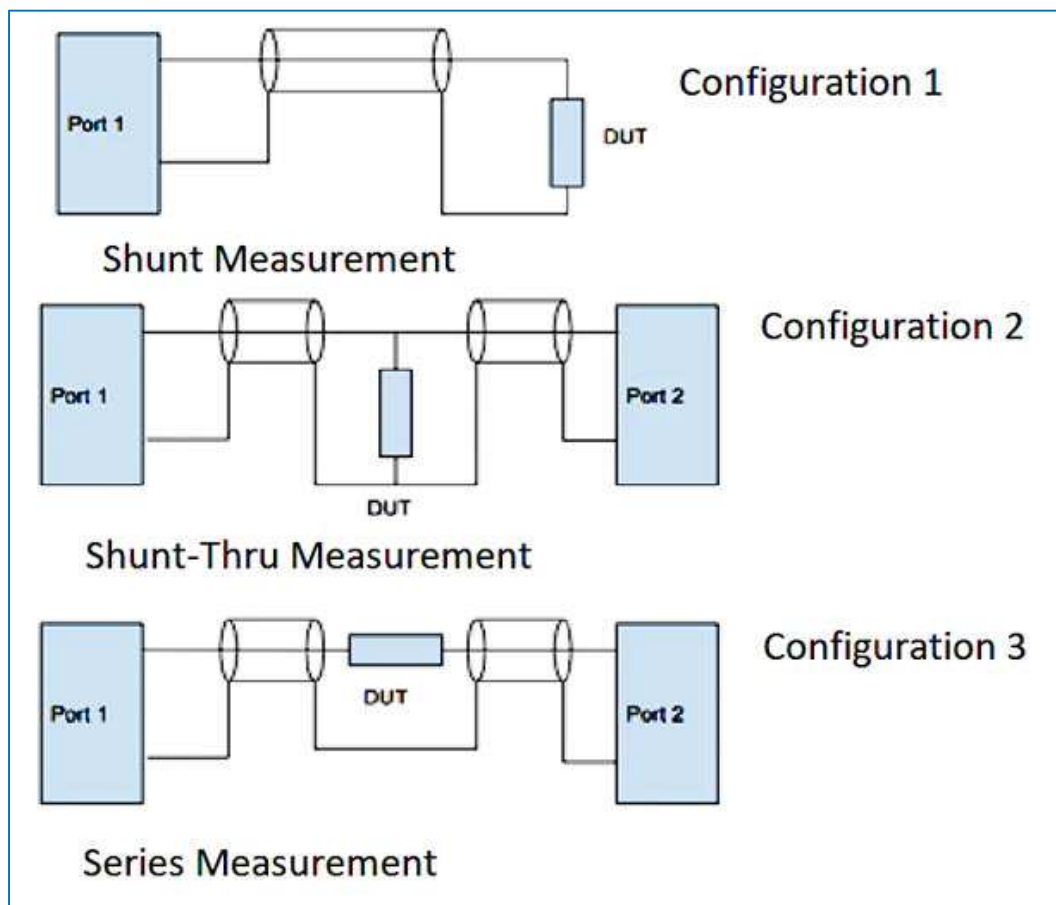


Fig. 12 : Illustration des trois méthodes de mesures d'impédance. Source : Microwave&RF, Make Accurate Impedance Measurement Using a VNA, Brian Walker, 21 Juin 2019, USA.

Lorsqu'on utilise un analyseur vectoriel et que l'on veut mesurer une impédance, comme par exemple celle d'une antenne, on utilise un seul port de mesure du VNA et on effectue une mesure du paramètre S_{11} . C'est ce que beaucoup d'OM ont déjà expérimenté en ayant recours à un *Antenna Analyzer*. Pour ceux qui ont eu l'opportunité d'adapter une antenne avec des Stubs, certains ont eu recours à un *Antenna Analyzer* du type *RigExpert* ou un analyseur vectoriel pour tailler correctement la longueur du Stub à la fréquence de travail.

La méthode utilisée pour connaître la partie résistive et la partie réactive de l'impédance du *Stub* consiste en une mesure du S_{11} avec affichage de l'abaque de Smith sur l'appareil de mesure. Il suffit alors de positionner un marqueur à la fréquence de travail désirée pour obtenir automatiquement les valeurs mesurées suivantes : R , jX , et la valeur en sous-multiple de Farad pour une réactance négative (capacitance) ou une valeur en sous-multiples de Henry pour une réactance positive (inductance).

Les figures suivantes illustrent les mesures d'un *Stub* en court-circuit et ensuite en circuit ouvert. Le *Stub* est constitué d'un câble coaxial RG-213 d'une longueur proche de 1,2 m. La fréquence de mesure est de 145 MHz sur un balayage en fréquence compris entre 300 kHz et 200 MHz. Les mesures sont effectuées sur un analyseur de réseau vectoriel HP 8753C avec un *S Test Set* HP 85047A. Le VNA est calibré avec un kit Type N HP 85032B. Les mesures sont ensuite comparées avec des simulations sur le logiciel SimSmith Ver. 17.0 q de AE6TY. On pourra remarquer que les résultats par la simulation logicielle confortent très bien les mesures qui ont été effectuées sur le VNA.

Ainsi, si l'on peut mesurer aussi facilement la capacité équivalente ou le coefficient de self induction équivalent d'un *Stub* à une fréquence donnée, la tentation est grande de procéder d'une façon similaire pour relever les mêmes types de valeurs pour un condensateur ou pour une bobine de self-induction. Il suffit de placer le composant directement sur le port 1 de mesure du VNA et de relever les valeurs S_{11} avec affichage sous l'abaque de Smith. Dans ce cas de figure, on vient d'appliquer la méthode *Shunt* (configuration n°1). Le composant est soudé sur un connecteur entre la *pin* centrale et le plan de masse de celui-ci.

Il y a tout de même une précaution élémentaire à observer : après le calibrage utilisateur du VNA par la méthode SOL (*Short, Open, Load*), il y a lieu de placer un connecteur identique à celui qui sera utilisé pour raccorder le composant. Le connecteur identique n'aura aucun composant raccordé et servira à calibrer le plan de référence là-où le composant sera raccordé ultérieurement.

Le connecteur identique sans composant représente une petite portion de ligne de transmission qui se termine sur un circuit ouvert. Lorsque le calibre de circuit ouvert est placé sur le port de mesure, on observe un point à l'extrémité droite sur l'affichage l'abaque de Smith. Lorsque l'on remplace le calibre par le connecteur identique sans composant, on s'aperçoit que le point s'est déplacé sur l'abaque : le plan de référence s'est déplacé. Pour ramener le plan de référence à l'origine, on utilise la fonction « *Delay* » du VNA que l'on règle de façon à ramener le point sur l'axe des réels sur le côté droit de l'abaque. Le « *Delay* » pour un connecteur type N femelle est de l'ordre de 130 ps.

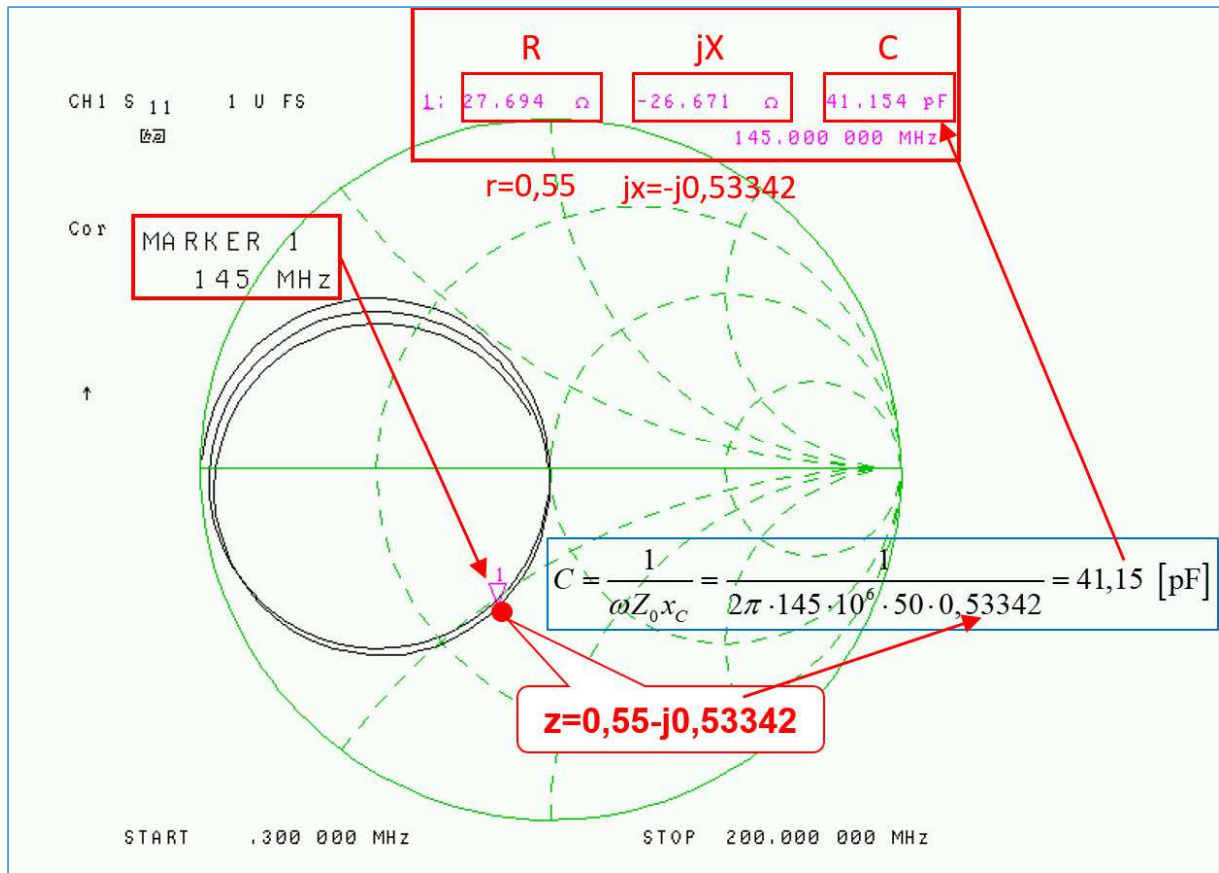


Fig. 13 : Mesure de l'impédance présentée par un *Stub* en court-circuit et placé en dérivation sur une ligne de transmission. VNA HP 8753C. Le *Stub* est constitué d'un câble coaxial RG-213/U d'une longueur proche de 1,2 m. L'étendue de mesure est de 300 kHz à 200 MHz. Le relevé de mesure est effectué à une fréquence de 145 MHz. Cliché ON4IJ.

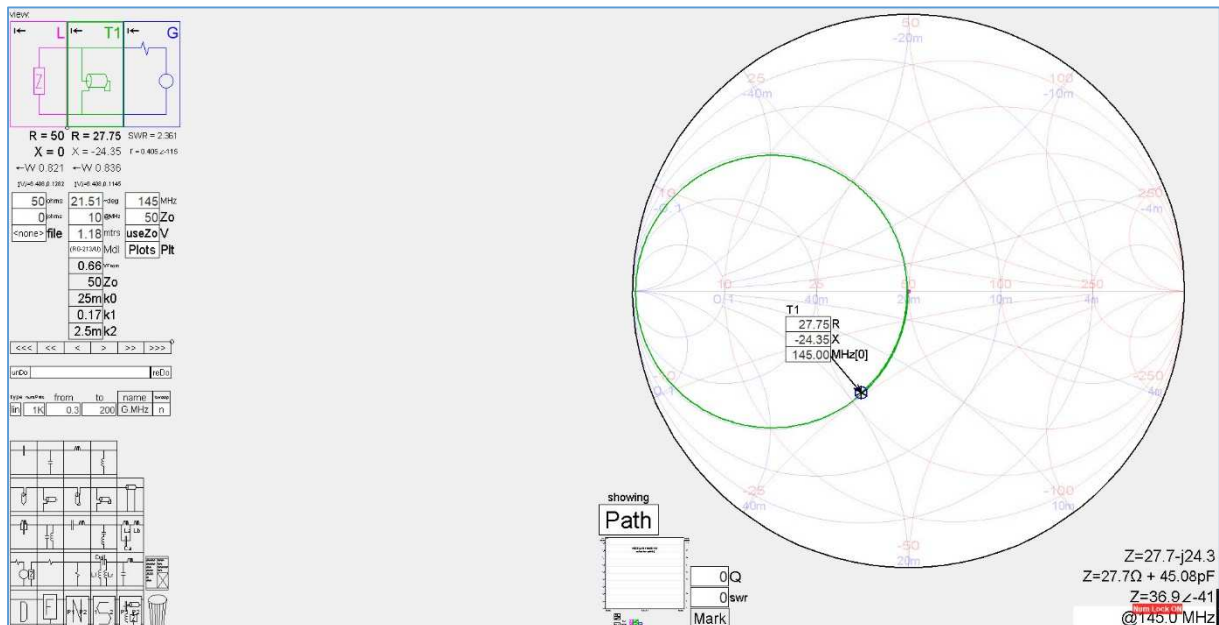


Fig. 14 : Idem que la figure précédente. Simulation avec le logiciel SimSmith (AE6TY). Les valeurs données par cette simulation sont très proches de celles qui ont été mesurées (voir dans le coin inférieur droit de la figure). Cliché ON4IJ.

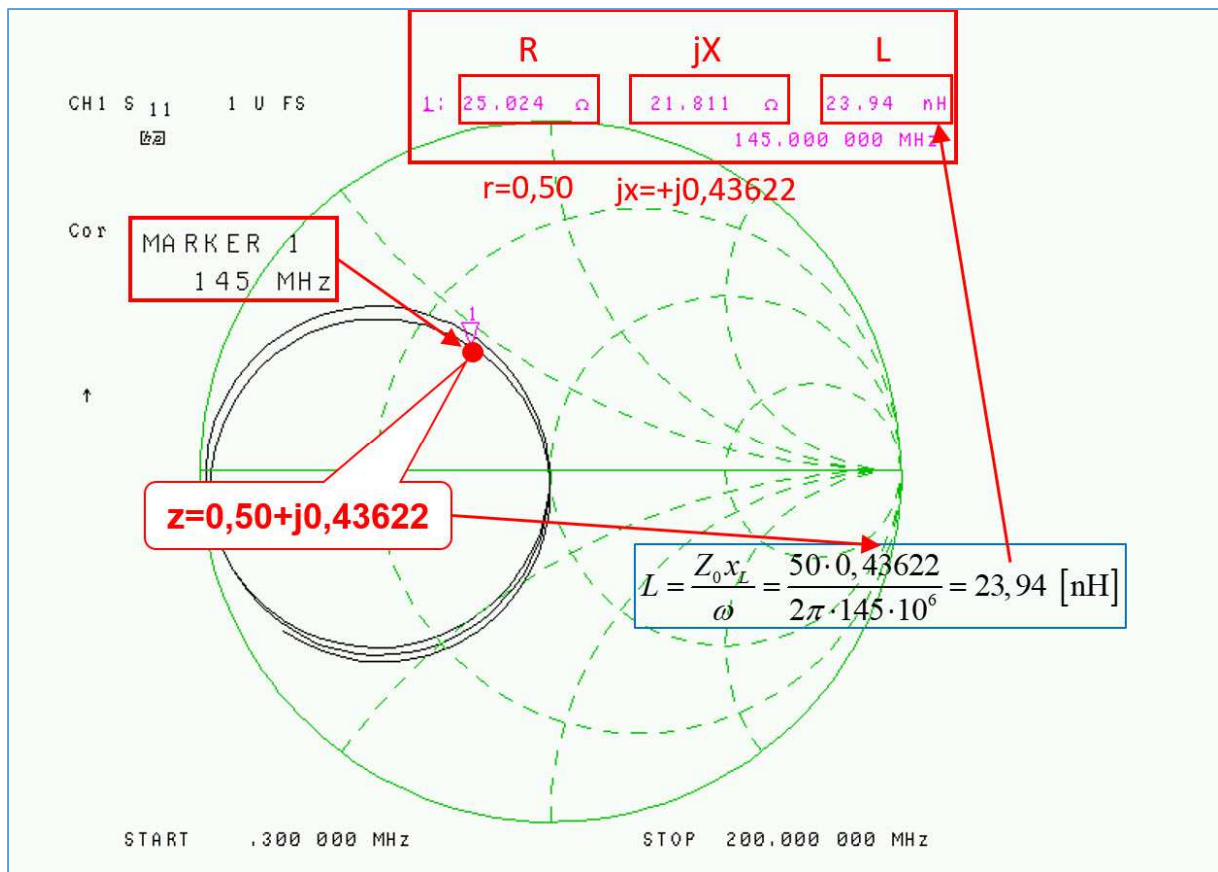


Fig. 15 : Idem que les figures ci-dessus mais avec un *Stub* en circuit ouvert à la place d'un *Stub* en court-circuit. Clicé ON4IJ.

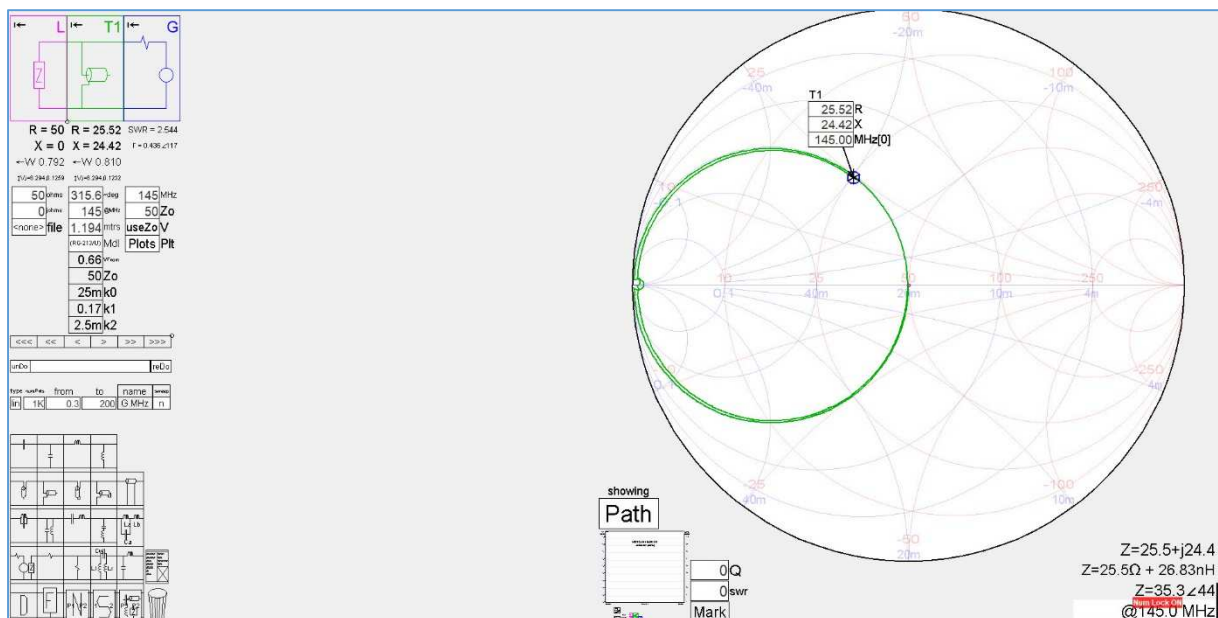


Fig. 16 : Idem que la figure précédente. Simulation avec le logiciel SimSmith (AE6TY). Les valeurs données par cette simulation sont très proches de celles qui ont été mesurées (voir dans le coin inférieur droit de la figure). Clicé ON4IJ.

La méthode de mesure Shunt S_{11} que nous venons d'expérimenter révèle très vite ses limites. En effet, même si l'on a pris toutes les précautions d'un calibrage utilisateur effectué avec le plus grand soin et que l'on a correctement réglé le plan de référence de mesure, on s'aperçoit que les erreurs de mesure deviennent inacceptables lorsque la valeur de l'impédance s'écarte de l'impédance Z_0 de référence. Toutefois, les erreurs de mesure restent acceptables pour des valeurs d'impédances mesurées qui se situent entre 3Ω et 300Ω . Par exemple, les mesures d'une bobine de self-induction de 70 nH ou celles d'un condensateur de 22 pF à une fréquence de 145 MHz sont satisfaisantes. En effet, à 145 MHz , une bobine de 70 nH représente une impédance de $|Z_L| = 2\pi \cdot 145 \cdot 10^6 \cdot 70 \cdot 10^{-9} = 63,8 [\Omega]$ et un condensateur de 22 pF représente à la

même fréquence une impédance de $|Z_C| = \frac{1}{2\pi \cdot 145 \cdot 10^6 \cdot 22 \cdot 10^{-12}} = 49,9 [\Omega]$.

On peut avoir l'intuition que la précision de mesure de Z selon cette méthode est relativement dépendante du SWR, c'est-à-dire de Γ ou tout simplement de S_{11} . On peut aussi subodorer que la précision de mesure de Z selon les autres méthodes basées sur le S_{21} soit aussi dépendante de la valeur de ce S_{21} .

Idée : analyser la variation de Z en fonction de la variation de S_{11} ou de S_{21} selon la méthode de mesure utilisée

Le cheminement de la pensée va être le suivant pour chaque méthode de mesure :

- Exprimer les trois relations mathématiques du paramètre S en fonction de l'impédance du DUT (Z_D) et de Z_0 dans chaque configuration :
 - o S_{11} pour la configuration *Shunt*,
 - o S_{21} pour la configuration *Shunt-Thru*,
 - o S_{21} pour la configuration *Series-Thru* ;
- Exprimer ces trois relations mathématiques sous la forme de Z_D en fonction de Z_0 et de S_{ij} (S_{11} *Shunt*, S_{21} *Shunt-Thru*, S_{21} *Series-Thru*) ;
- Calculer la variation de Z_D en fonction de la variation de S_{ij} dans chacune des trois configurations : il s'agit ici d'une dérivée partielle d'une fonction à une variable complexe par rapport à une autre variable complexe ; il s'agit ici d'un opérateur différentiel qui est appelé le Jacobien en mathématiques : $J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{ij}}$;
- Relever l'erreur totale maximale de mesure des paramètres S en fonction du VNA utilisé pour les mesures ; cette erreur totale maximale est le résultat d'un calcul à partir des données sur les différents types d'erreurs dans un VNA ; les types d'erreurs (incertitudes des mesures) sont données dans les caractéristiques du VNA et sont publiées par le constructeur ;
- Calculer la dispersion de l'erreur des paramètres S_{ij} du VNA utilisé selon une loi de distribution normale (loi Gaussienne) avec un écart-type (*Standard Deviation*) de 3σ donnant un niveau de confiance (intervalle de confiance, intervalle de fluctuation) de $99,73 \%$;

- Étudier la propagation des incertitudes de mesure des paramètres S_{ij} vers les incertitudes de mesure de l'impédance sous test Z_D ; cela s'effectue par une relation mathématique faisant intervenir le Jacobien J et son transposé J^T ; en d'autres mots : partir de la dispersion de l'erreur des paramètres S_{ij} pour arriver à déterminer la dispersion de l'erreur de mesure de l'impédance sous test Z_D ;
- Déterminer l'écart maximum (erreur absolue) de l'impédance sous test en fonction de la dispersion de la mesure de celle-ci pour un écart type de 3σ ;
- Exprimer l'erreur relative de la mesure d'impédance Z_D sous test en % ;
- Enfin tracer un graphique de l'erreur relative de la mesure d'impédance Z_D selon les trois configurations des méthodes de mesure.

Voici donc tout un programme de recherches.

Config. n°1 : 1-Port S_{11} Shunt ; recherche de Z_D en fonction de Z_0 et de S_{11}

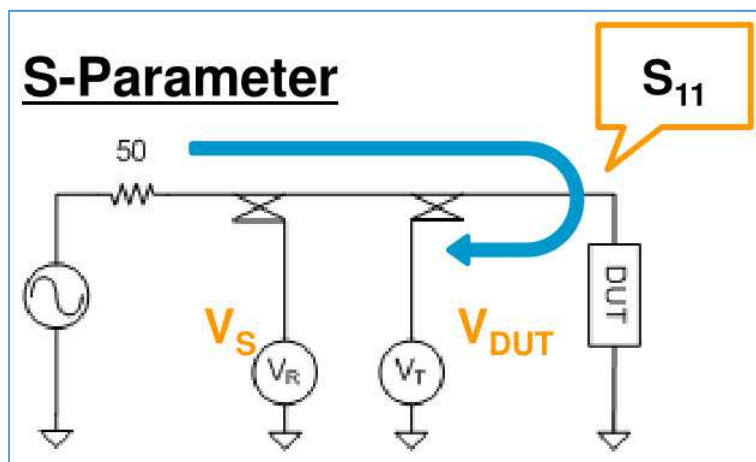


Fig. 17 : Illustration de la configuration 1-Port S_{11} Shunt avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Dans le VNA, V_R mesure la tension de la source V_S . V_R ; la tension de l'onde incidente est mesurée par le récepteur « R » (référence). V_T , la tension de l'onde réfléchie est mesurée par le récepteur « A ». Ainsi, dans le VNA, on a :

$$S_{11} = \frac{\text{refl.}}{\text{incid.}} = \frac{A}{R} = \frac{V_T}{V_R}$$

Le quadripôle constitué par le DUT, ici Z_D , se résume à un dipôle :

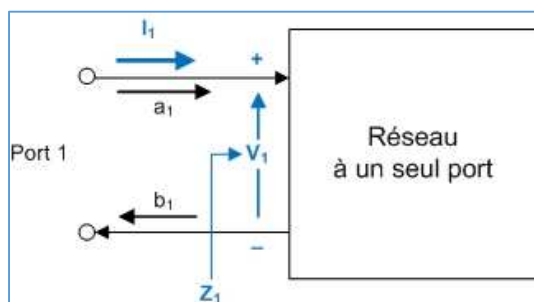


Fig. 18 : Modèle d'un réseau à un seul port avec tension V_1 et courant I_1 d'onde incidente et réfléchie. Graphisme ON4IJ.

Par définition du paramètre S_{11} , on a :

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{V_1 - I_1 \cdot Z_0}{V_1 + I_1 \cdot Z_0} = \frac{\frac{V_1}{I_1} - Z_0}{\frac{V_1}{I_1} + Z_0} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

Exprimons Z_1 en fonction de Z_0 et de S_{11} :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \text{ Shunt} \\ \Leftrightarrow S_{11} \cdot (Z_1 + Z_0) &= Z_1 - Z_0 \\ \Leftrightarrow S_{11} \cdot Z_1 + S_{11} \cdot Z_0 &= Z_1 - Z_0 \\ \Leftrightarrow S_{11} \cdot Z_1 - Z_1 &= -S_{11} \cdot Z_0 - Z_0 \\ \Leftrightarrow Z_1 \cdot (S_{11} - 1) &= -Z_0 (S_{11} + 1) \\ \Leftrightarrow Z_1 \cdot (1 - S_{11}) &= Z_0 (1 + S_{11}) \\ \Leftrightarrow Z_1 &= Z_0 \cdot \left(\frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \right) \end{aligned}$$

Ici, l'impédance Z_1 est celle qui est vue par le port 1 de mesure et elle correspond à l'impédance Z_D du DUT, on a donc :

$$Z_D = Z_0 \cdot \left(\frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \right) \text{ Shunt}$$

En analysant d'un peu plus près les formules ci-dessus et en les faisant parler, on peut déjà en retirer les informations suivantes :

$$S_{11} = \frac{\text{refl.}}{\text{incid.}} = \frac{A}{R} = \frac{V_T}{V_R} = \frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0} \text{ Shunt} \Leftrightarrow V_T = \frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0} \cdot V_R$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow Z_0 \text{ alors } V_T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 0 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow -\infty \text{ [dB]}$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow 0 \text{ ou } \infty \text{ alors } V_T \rightarrow V_R \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 1 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow 0 \text{ [dB]}$$

Intuitivement, on pourrait déjà s'imaginer que dans une mesure qui s'établit sur un rapport de deux valeurs, plus les deux valeurs sont semblables et plus il est difficile de se prononcer sur l'erreur de mesure. Dans le cas contraire, plus les deux valeurs sont différentes, au mieux l'appareil de mesure peut donner une valeur significative du rapport entre les deux valeurs, ce qui contribuerait à réduire les incertitudes de mesure.

Ici, la maximalisation de différence entre les deux grandeurs mesurées V_T et V_R intervient lorsque la valeur de Z_D se rapproche de Z_0 . Dans ces conditions, on obtient le minimum d'incertitude de mesure. Cette méthode *Shunt* est donc adaptée à la mesure d'impédances proches de Z_0 (50Ω).

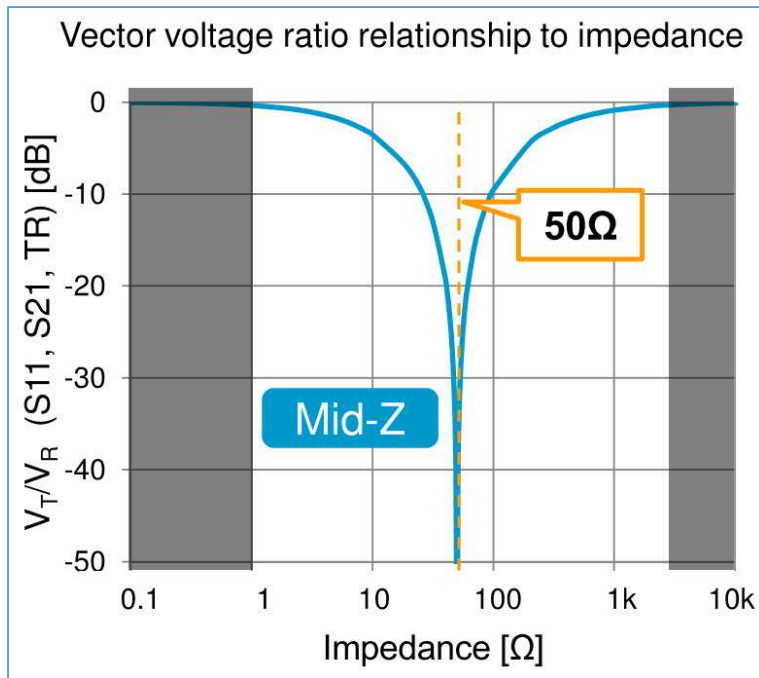


Fig. 19 : Comportement du rapport des tensions V_T/V_R exprimé en dB dans la configuration 1-Port S_{11} *Shunt* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

En ce qui concerne le module du coefficient de réflexion S_{11} exprimé en dB, (autrement dit les pertes de retour), l'allure de la courbe est similaire à celle du graphique précédent. On pouvait déjà le prévoir : si Z_D se rapproche de Z_0 alors le SWR tend vers 1:1. Pour des valeurs de Z_D plus petites ou plus grandes que Z_0 , le SWR monte en flèche.

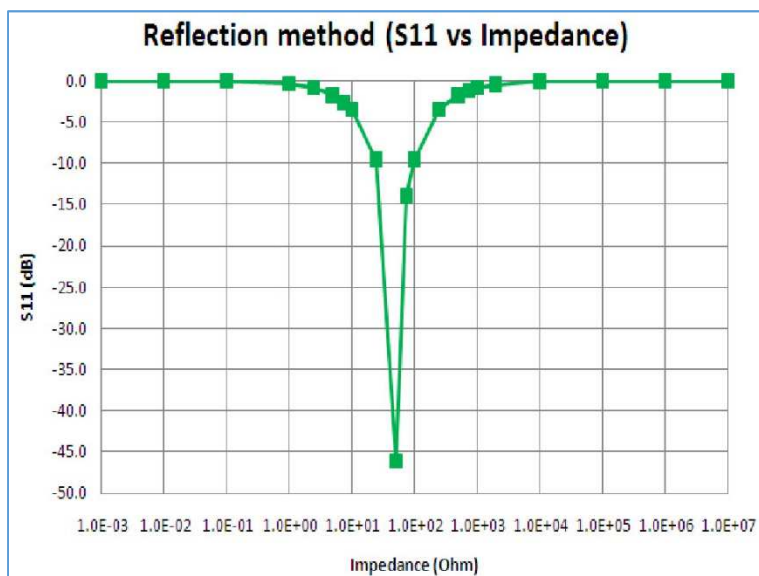


Fig. 20 : Comportement du module du coefficient de réflexion S_{11} exprimé en dB (pertes de retour) dans la configuration 1-Port S_{11} *Shunt* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Config. n°2 : 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* ; recherche de Z_D en fonction de Z_0 et de S_{21}

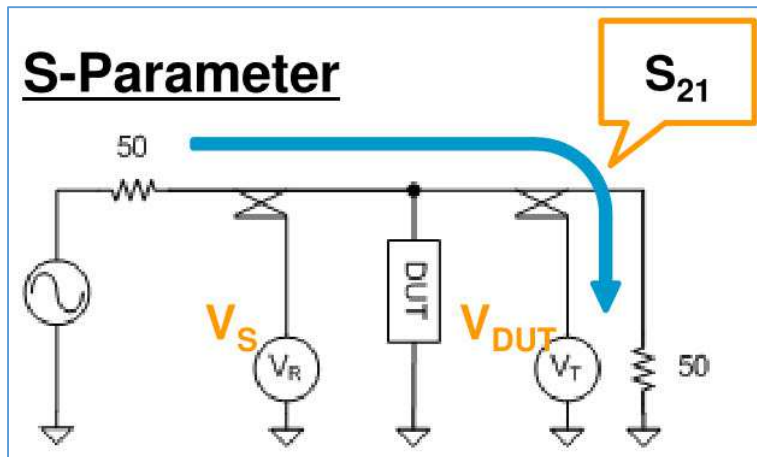


Fig. 21 : Illustration de la configuration 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Dans le VNA, V_R mesure la tension de la source V_S . V_R , la tension de l'onde incidente est mesurée par le récepteur « R » (référence). V_T , la tension de l'onde transmise est mesurée par le récepteur « B ». Ici, V_T correspond aussi à V_{DUT} c'est-à-dire la tension qui est présente aussi bien aux bornes de Z_D et que celles de Z_0 : les impédances Z_D et Z_0 sont en parallèle. Ainsi, dans le VNA, on a :

$$S_{21} = \frac{\text{transm.}}{\text{incid.}} = \frac{B}{R} = \frac{V_T}{V_R}$$

Le quadripôle constitué par le DUT est cette fois-ci une impédance Z_D placée en parallèle sur la ligne de transmission et sur la charge. Il est à remarquer que le port 2 de mesure représente une impédance de charge adaptée de valeur Z_0 et est donc placée en parallèle sur Z_D . Dans une association d'impédance en parallèle ($Z_D \parallel Z_0$) les courants se répartissent dans chaque impédance (lois de Kirchhoff). En revanche la tension aux bornes de chaque impédance est la même : $V_1 = V_2$.

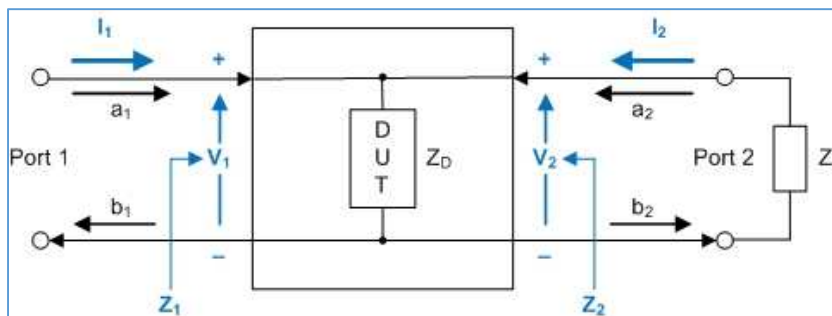


Fig. 22 : Modèle d'un réseau à deux ports constitué par une impédance en parallèle sur la ligne de transmission. Z_D est en parallèle sur Z_0 et $V_1 = V_2$. Graphisme ON4IJ.

Par définition du paramètre S_{21} , on a :

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{V_2 - I_2 \cdot Z_0}{V_1 + I_1 \cdot Z_0}$$

$$\text{Or } a_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{V_2 + I_2 \cdot Z_0}{2\sqrt{Z_0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow V_2 + I_2 \cdot Z_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow V_2 = -I_2 \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow I_2 \cdot Z_0 = -V_2$$

$$\text{Donc } S_{21} = \frac{V_2 + V_2}{V_1 + I_1 \cdot Z_0} = \frac{2 \cdot V_2}{V_1 + I_1 \cdot Z_0}$$

Et comme $V_1 = V_2$

$$\text{On obtient } S_{21} = \frac{2 \cdot V_1}{V_1 + I_1 \cdot Z_0}$$

$$S_{21} = \frac{\frac{2 \cdot V_1}{I_1}}{\frac{V_1 + I_1 \cdot Z_0}{I_1}} = \frac{2 \cdot V_1}{V_1 + I_1 \cdot Z_0} = \frac{2 \cdot V_1}{I_1 \left(\frac{V_1}{I_1} + Z_0 \right)}$$

$$S_{21} = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_0}$$

$$\text{Ici, } Z_1 = Z_D \parallel Z_0, \text{ alors : } Z_1 = \frac{Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 + Z_D}$$

Et donc :

$$S_{21} = \frac{2 \cdot \frac{Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 + Z_D}}{\frac{Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 + Z_D} + Z_0} = \frac{2 \cdot \frac{Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 + Z_D}}{\frac{Z_0 \cdot Z_D + Z_0 \cdot (Z_0 + Z_D)}{Z_0 + Z_D}} = \frac{2 \cdot Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 \cdot Z_D + Z_0 \cdot (Z_0 + Z_D)} = \frac{2 \cdot Z_0 \cdot Z_D}{Z_0 \cdot (Z_D + Z_0 + Z_D)}$$

$$S_{21} = \frac{2 \cdot Z_D}{2 \cdot Z_D + Z_0}$$

$$\boxed{S_{21} = \frac{2 \cdot Z_D}{Z_0 + 2 \cdot Z_D} \text{ Shunt-Thru}}$$

Exprimons Z_D en fonction de Z_0 et de S_{21} :

$$S_{21} = \frac{2 \cdot Z_D}{2 \cdot Z_D + Z_0} \text{ Shunt-Thru}$$

$$\Leftrightarrow S_{21} \cdot (2 \cdot Z_D + Z_0) = 2 \cdot Z_D$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot S_{21} \cdot Z_D + S_{21} \cdot Z_0 = 2 \cdot Z_D$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot S_{21} \cdot Z_D - 2 \cdot Z_D = -S_{21} \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow Z_D \cdot (2 \cdot S_{21} - 2) = -S_{21} \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow Z_D = \frac{-S_{21} \cdot Z_0}{2 \cdot S_{21} - 2} = \frac{S_{21} \cdot Z_0}{2 - 2 \cdot S_{21}} = \frac{Z_0 \cdot S_{21}}{2 \cdot (1 - S_{21})}$$

$Z_D = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{S_{21}}{(1 - S_{21})} \text{ Shunt-Thru}$
--

En analysant d'un peu plus près les formules ci-dessus et en les faisant parler, on peut déjà en retirer les informations suivantes :

$$S_{21} = \frac{\text{transm.}}{\text{incid.}} = \frac{B}{R} = \frac{V_T}{V_R} = \frac{2 \cdot Z_D}{2 \cdot Z_D + Z_0} \text{ Shunt-Thru} \Leftrightarrow V_T = \frac{2 \cdot Z_D}{2 \cdot Z_D + Z_0} \cdot V_R$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow 0 \text{ alors } V_T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 0 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow -\infty \text{ [dB]}$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow \infty \text{ alors } V_T \rightarrow V_R \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 1 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow 0 \text{ [dB]}$$

Ici, la maximalisation de différence entre les deux grandeurs mesurées V_T et V_R intervient lorsque la valeur de Z_D se rapproche de 0. Dans ces conditions, on obtient le minimum d'incertitude de mesure. Cette méthode *Shunt-Thru* est donc adaptée à la mesure d'impédances faibles.

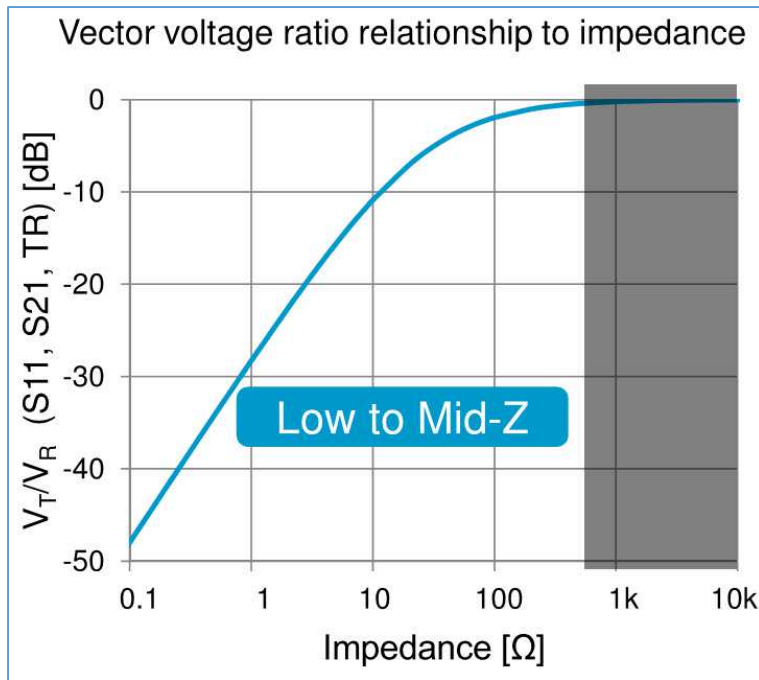


Fig. 23 : Comportement du rapport des tensions V_T/V_R exprimé en dB dans la configuration 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

En ce qui concerne le module du coefficient de réflexion S_{21} exprimé en dB, (les pertes d'insertion du réseau), l'allure de la courbe est similaire à celle du graphique précédent.

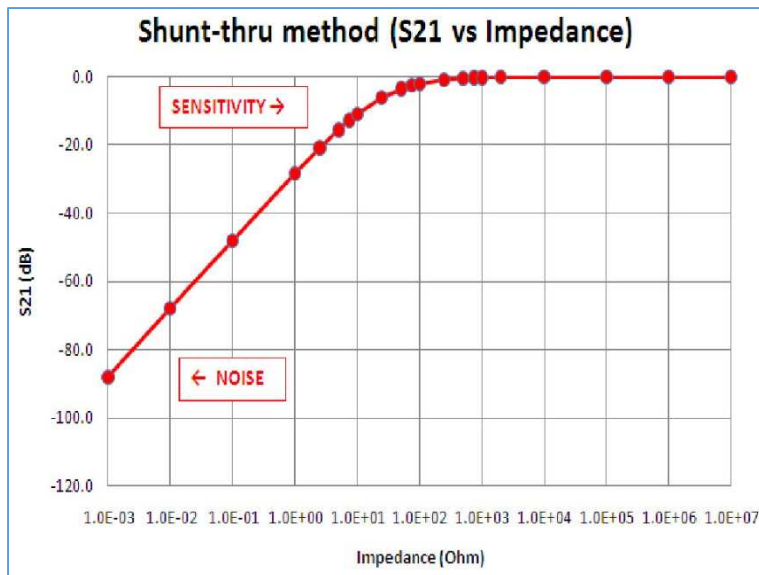


Fig. 24 : Comportement du module du coefficient de transmission S_{21} exprimé en dB (pertes d'insertion) dans la configuration 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Config. n°3 : 2-Ports S_{21} *Series-Thru* ; recherche de Z_D en fonction de Z_0 et de S_{21}

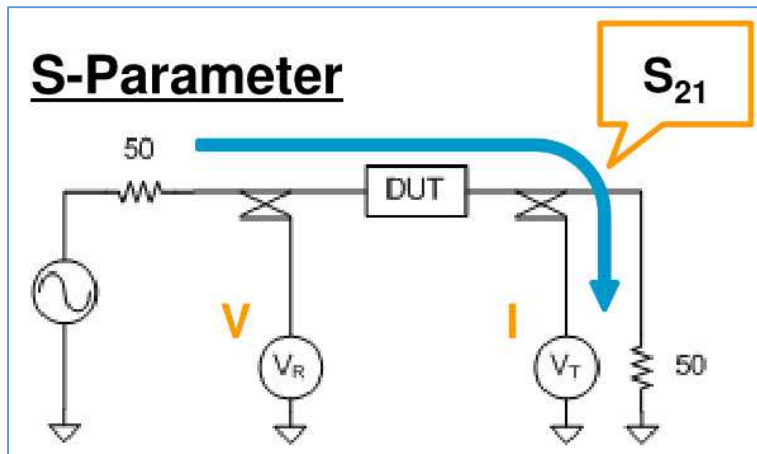


Fig. 25 : Illustration de la configuration 2-Ports S_{21} *Series-Thru* avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Dans le VNA, V_R mesure la tension de la source V_S . V_R , la tension de l'onde incidente est mesurée par le récepteur « R » (référence). V_T , est le reflet de la tension aux bornes de Z_0 qui est fonction du courant de l'onde transmise. Cette tension V_T est mesurée par le récepteur « B ». Ici, le courant I traversant Z_D correspond aussi à celui qui traverse Z_0 : les impédances Z_D et Z_0 sont en série. Ainsi, dans le VNA, on a :

$$S_{21} = \frac{\text{transm.}}{\text{incid.}} = \frac{B}{R} = \frac{V_T}{V_R}$$

Le quadripôle constitué par le DUT est cette fois-ci une impédance Z_D placée en série sur la ligne de transmission. Il est à remarquer que le port 2 de mesure représente une impédance de charge de valeur Z_0 et est donc placée en série avec Z_D . Dans une association d'impédance en série ($Z_D + Z_0$) les courants sont identiques dans chaque impédance (lois de Kirchhoff), mais ici, ils sont de sens opposés. On obtient donc $I_1 = -I_2$ au niveau du quadripôle.

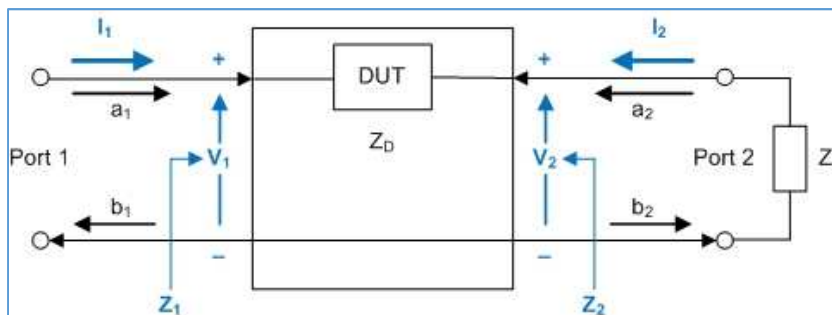


Fig. 26 : Modèle d'un réseau à deux ports constitué par une impédance en série sur la ligne de transmission. Z_D est en série avec Z_0 et $I_1 = -I_2$. Graphisme ON4IJ.

Exprimons Z_D en fonction de Z_0 et de S_{21} :

$$S_{21} = \frac{2 \cdot Z_0}{2 \cdot Z_0 + Z_D} \text{ Series}$$

$$\Leftrightarrow S_{21} \cdot (2 \cdot Z_0 + Z_D) = 2 \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot Z_0 + Z_D = \frac{2 \cdot Z_0}{S_{21}}$$

$$\Leftrightarrow Z_D = \frac{2 \cdot Z_0}{S_{21}} - 2 \cdot Z_0 = \frac{2 \cdot Z_0 - 2 \cdot Z_0 \cdot S_{21}}{S_{21}} = \frac{2 \cdot Z_0 (1 - S_{21})}{S_{21}}$$

$Z_D = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{(1 - S_{21})}{S_{21}} \text{ Series-Thru}$

En analysant d'un peu plus près les formules ci-dessus et en les faisant parler, on peut déjà en retirer les informations suivantes :

$$S_{21} = \frac{\text{transm.}}{\text{incid.}} = \frac{B}{R} = \frac{V_T}{V_R} = \frac{2 \cdot Z_0}{2 \cdot Z_0 + Z_D} \text{ Series-Thru} \Leftrightarrow V_T = \frac{2 \cdot Z_0}{2 \cdot Z_0 + Z_D} \cdot V_R$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow 0 \text{ alors } V_T \rightarrow V_R \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 1 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow 0 \text{ [dB]}$$

$$\text{Si } Z_D \rightarrow \infty \text{ alors } V_T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{V_T}{V_R} \rightarrow 0 \Rightarrow 20 \log \left(\frac{V_T}{V_R} \right) \rightarrow -\infty \text{ [dB]}$$

Ici, la maximalisation de différence entre les deux grandeurs mesurées V_T et V_R intervient lorsque la valeur de Z_D se rapproche de ∞ . Dans ces conditions, on obtient le minimum d'incertitude de mesure. Cette méthode *Series-Thru* est donc adaptée à la mesure d'impédances élevées.

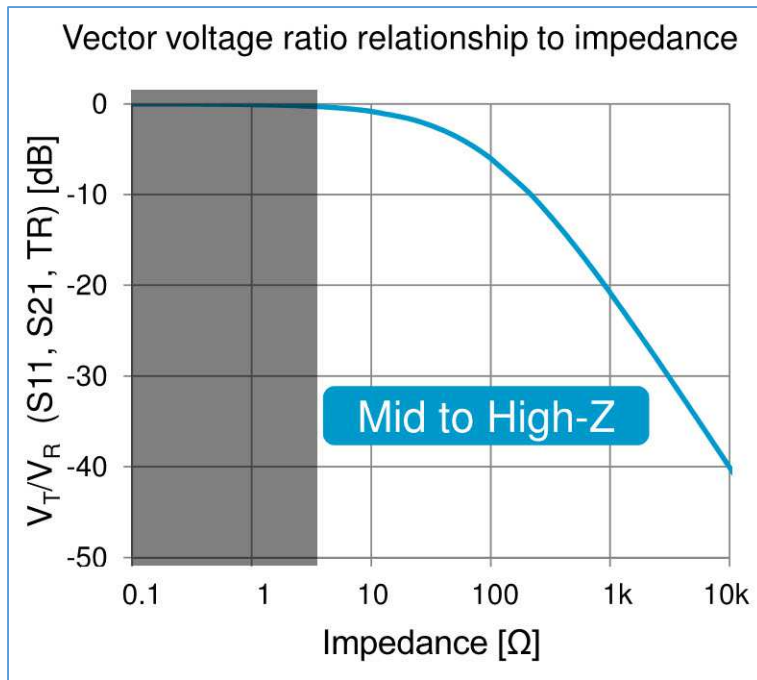


Fig. 27 : Comportement du rapport des tensions V_T/V_R exprimé en dB dans la configuration 2-Ports S_{21} *Series-Thru* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

En ce qui concerne le module du coefficient de réflexion S_{21} exprimé en dB, (les pertes d'insertion du réseau), l'allure de la courbe est similaire à celle du graphique précédent.

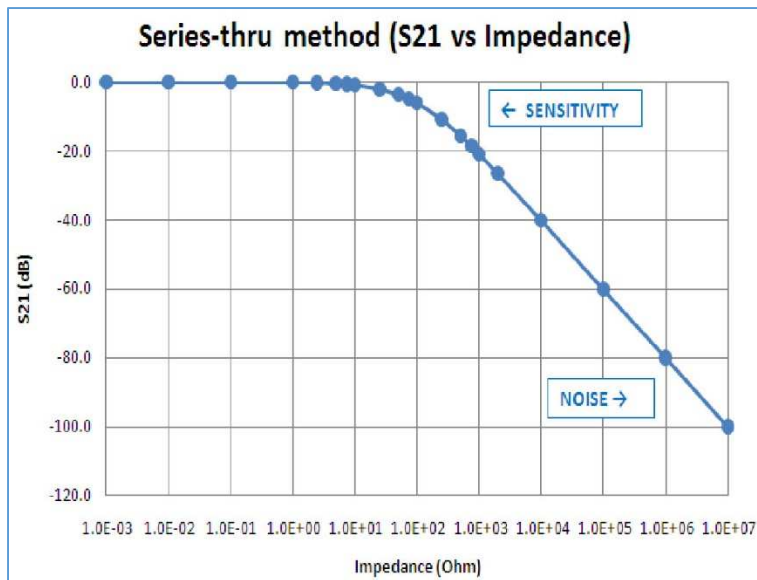


Fig. 28 : Comportement du module du coefficient de transmission S_{21} exprimé en dB (pertes d'insertion) dans la configuration 2-Ports S_{21} *Series-Thru* en fonction de la valeur de l'impédance du DUT Z_D mesurée avec un VNA. Sources : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Calcul de la variation de Z_D en fonction de la variation de S_{ij} : opérateur différentiel Jacobien J

Ce que nous voulons chercher ici, c'est le comportement de l'incertitude de la mesure de Z_D : l'impédance sous test. Or Z_D est fonction d'une seule variable qui est S_{ij} : S_{11} dans la configuration *Shunt* et S_{21} dans les configurations *Shunt-Thru* et *Series-Thru*.

$Z_D = Z_0 \cdot \left(\frac{1+S_{11}}{1-S_{11}} \right) \text{ Shunt}$	$Z_D = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{S_{21}}{(1-S_{21})} \text{ Shunt-Thru}$	$Z_D = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{(1-S_{21})}{S_{21}} \text{ Series-Thru}$
--	--	---

La principale source d'incertitude de mesure vient de l'analyseur de réseau vectoriel lui-même qui donne la valeur du coefficient de réflexion S_{11} ou du coefficient de transmission S_{21} lorsqu'on évalue un DUT. Les dispositifs d'essai (*Test fixture*) qui permettent de raccorder le DUT contribuent aussi aux incertitudes de mesure. Toutefois, il y a moyen de compenser les incertitudes du dispositif d'essai lors du calibrage utilisateur de l'analyseur de réseau vectoriel.

Pour commencer, on va déterminer la variation de Z_D en fonction de la variation de S_{ij} . Il s'agit ici d'effectuer une dérivée partielle d'une variable complexe par rapport à une autre variable complexe. En mathématique, cette opération est appelée un opérateur différentiel Jacobien du nom de Karl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand du XIX^{ème} siècle, connu pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles et leurs applications. Les mathématiciens utilisent ces concepts, entre autres, en calcul matriciel en utilisant le gradient d'une fonction.

Jacobien, c'est très simple par analogie avec l'exemple du gradient de température :

Dans une maison d'habitation, la température intérieure est plus élevée que la température à l'extérieur (en général en hiver). Dans l'épaisseur des murs de la maison, il y a une évolution de la température (variation de température) au fur et à mesure que l'on se déplace depuis l'intérieur du mur vers l'extérieur du mur (variation de longueur). Il y a donc une variation de température en fonction d'une variation de longueur (épaisseur du mur). Le gradient de température est ici la dérivée partielle (variation) de la température par rapport à la dérivée partielle (variation) de la longueur.

Bref rappel sur les dérivées

$$(k)' = 0$$

$$(k \cdot x)' = k$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Bref rappel sur les dérivées totales et partielles

$$u = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 2ax + b$$

$$u = f(x, y, z) = 2x + 3y + 7xy + 5 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 7y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3 + 7x \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Jacobien de l'impédance Z_D par rapport aux paramètres S_{ij} : $J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{ij}}$

Config. n°1 : 1-Port S_{11} Shunt

$$Z_D = Z_0 \cdot \left(\frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \right) \text{ Shunt}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{11}} = Z_0 \cdot \frac{1 \cdot (1 - S_{11}) - (1 + S_{11}) \cdot (-1)}{(1 - S_{11})^2} = Z_0 \cdot \frac{1 - S_{11} + 1 + S_{11}}{(1 - S_{11})^2} = Z_0 \cdot \frac{2}{(1 - S_{11})^2}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{11}} = \frac{2 \cdot Z_0}{(1 - S_{11})^2} \text{ Shunt}$$

Config. n°2 : 2-Ports S_{21} Shunt-Thru

$$Z_D = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{S_{21}}{(1 - S_{21})} \text{ Shunt-Thru}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{1 \cdot (1 - S_{21}) - S_{21} \cdot (-1)}{(1 - S_{21})^2} = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{1 - S_{21} + S_{21}}{(1 - S_{21})^2} = \frac{Z_0}{2} \cdot \frac{1}{(1 - S_{21})^2}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = \frac{Z_0}{2 \cdot (1 - S_{21})^2} \text{ Shunt-Thru}$$

Config. n°3 : 2-Ports S_{21} Series-Thru

$$Z_D = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{(1 - S_{21})}{S_{21}} \text{ Series-Thru}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{-1 \cdot S_{21} - (1 - S_{21}) \cdot 1}{S_{21}^2} = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{-S_{21} - 1 + S_{21}}{S_{21}^2} = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{-1}{S_{21}^2}$$

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = \frac{-2 \cdot Z_0}{S_{21}^2} \text{ Series-Thru}$$

Relevé de l'erreur totale maximale de mesure des paramètres S en fonction de l'analyseur de réseau vectoriel utilisé : $|\Delta S_{ij \max}|$

L'erreur totale maximale de mesure sur les paramètres S, notée $|\Delta S_{ij \max}|$, est le résultat d'un calcul à partir des données sur les différents types d'erreurs (incertitudes des mesures) dans un VNA. Les types d'erreurs sont donnés dans les caractéristiques du VNA et sont publiées par le constructeur. Les différents types d'erreurs de mesure d'un VNA peuvent se résumer comme suit :

- les erreurs systématiques ;
- les erreurs aléatoires ;
- les erreurs de dérives.

Erreurs systématiques :

- « fuite » de directivité des coupleurs directionnels (*Leakage*) ;
- réflexion du signal par désadaptation de la source (Source Mismatch) ;
- réflexion du signal par désadaptation de la charge (Load Mismatch) ;
- cohérence de réponse en fréquence des récepteurs pour la mesure de réflexion A/R (Reflection Tracking) ;
- cohérence de réponse en fréquence des récepteurs pour la mesure de transmission B/R (Transmission Tracking) ;
- diaphonie (Crosstalk) entre les ports de mesure (isolation) ; etc.

Erreurs aléatoires :

- répétabilité du coefficient de réflexion des connecteurs ;
- répétabilité des coefficients de transmission des connecteurs ;
- stabilité du coefficient de réflexion dans les câbles de mesure ;
- stabilité du coefficient de transmission dans les câbles de mesure ; etc.

Erreurs de dérive :

- dérive de la magnitude (module) due à la température ;
- dérive de la phase due à la température ; etc.

D'une façon simple, on peut donner un seul coefficient d'incertitude de mesure globale du VNA en fonction du type de paramètre S mesuré (S_{11} ou S_{21}). Ce coefficient est généralement exprimé en dB ou sous une forme linéaire.

Par exemple, la société Copper Mountain Technologies publie les données suivantes pour le VNA S5065 (9 kHz – 6,5 GHz) :

- précision de mesure pour le paramètre S_{11} : 0,4 dB pour un écart-type de 3σ , ce qui donne en valeur linéaire $|\Delta S_{11 \max}| = 0,0462$;
- précision de mesure pour le paramètre S_{21} : 0,2 dB pour un écart-type de 3σ , ce qui donne en valeur linéaire $|\Delta S_{21 \max}| = 0,0228$.

$$\text{Valeur linéaire} = 10^{\left(\frac{n \text{ [dB]}}{20}\right)} - 1 \text{ si } n > 0 ; \text{ Valeur linéaire} = 10^{\left(\frac{n \text{ [dB]}}{20}\right)} \text{ si } n < 0 .$$

Certains types d'incertitudes de mesure peuvent se révéler plus prédominantes par rapport à d'autres. Certaines incertitudes peuvent rester constante, d'autre peuvent varier en fonction du module du paramètre S ($|S_{ij}|$) et d'autres peuvent varier en fonction du carré du module du paramètre S ($|S_{ij}|^2$).

La société Copper Mountain Technologies donne à titre d'exemple les formules suivantes pour le calcul de l'erreur totale maximale $|\Delta S_{ij \max}|$ en donnant les valeurs de toutes les différentes incertitudes pour le VNA S5048 20 kHz - 4,8 GHz :

$$|\Delta S_{11}^{\max}| = |D| + |R - 1| \cdot |S_{11}| + |R| \cdot |M| \cdot |S_{11}|^2$$

$$|\Delta S_{21}^{\max}| = (|T - 1| + |M| \cdot |S_{11}| + |L| \cdot |S_{22}| + |M| \cdot |L| \cdot |S_{21}| \cdot |S_{12}|) \cdot |S_{21}| + |X|$$

Fig. 29 : Calcul de l'erreur totale maximale des paramètres S ($|\Delta S_{ij \max}|$) du VNA S5048. Source : Copper Mountain Technologies, Measurement of Electronic Component Impedance Using A Vector Network Analyzer, 26 Mars 2019, Indianapolis, IN USA.

Parameter	Notation	Typical Value
Directivity	$ D $	50 dB (0.003 on linear scale)
Source match	$ M $	46 dB (0.005 on linear scale)
Load match	$ L $	46 dB (0.005 on linear scale)
Reflection tracking	$ R $	0.02 dB (1.002 on linear scale)
	$ R - 1 $	0.002 on a linear scale
Transmission tracking	$ T $	0.05 dB (1.006 on linear scale)
	$ T - 1 $	0.06 on linear scale
Isolation	$ X $	120 dB

Fig. 30 : Paramètres d'incertitudes de mesure pour un VNA S5048. Source : Copper Mountain Technologies, Measurement of Electronic Component Impedance Using A Vector Network Analyzer, 26 Mars 2019, Indianapolis, IN USA.

Nous avons joué le jeu de calculer l'erreur totale maximale de mesure des paramètres S pour un analyseur de réseau vectoriel Hewlett Packard HP 8753C associé avec un *S-Parameter Test Set* HP 85047A et ayant été calibré dans les conditions de mesure avec un *Calibration Kit Type N 50 Ω* HP 85032B. Ce calcul est une véritable entreprise et nous a fait prendre conscience que quantifier les incertitudes d'un appareil de mesure est un véritable art qui est exercé par les constructeurs qui mettent à disposition des appareils de mesure performants sur le marché mondial.

Dans ce qui suit, on se limitera à donner la marche à suivre pour le paramètre S_{11} . La démarche pour le S_{21} est relativement similaire à quelques différences près. Nous invitons le lecteur à faire le calcul pour le S_{21} à titre d'exercice.

Calcul de l'erreur totale maximale de mesure du paramètre S_{11} pour un analyseur de réseau vectoriel Hewlett Packard HP 8753C : $|\Delta S_{11 \max}|$

Avant de commencer ce calcul, il y a lieu de déterminer une fréquence à laquelle les incertitudes de mesures sont calculées. Ensuite, il faut choisir le niveau de l'amplitude du signal en dBm et la résolution de bande passante (RBW) ici fixée à 10 Hz. Il faut ensuite déterminer l'amplitude de la mesure effectuée pour pouvoir spécifier l'erreur dynamique. Il faut enfin choisir un écart maximal de température lors des mesures ; nous avons choisi ici un écart de ± 3 °C avec une valeur de $\Gamma = 0,5$.

Nous avons donc choisi les conditions de mesures suivantes :

- Fréquence : 500 MHz ;
- Niveau d'amplitude du signal : 0 dBm ;
- Résolution de bande passante (RBW) : 10 Hz ;
- Précision de la dynamique de mesure pour un niveau d'amplitude mesurée situé à -50 dB par rapport au niveau de référence ;
- Écart de température : ± 3 °C et $\Gamma = 0,5$;
- Stabilité des coefficients de réflexion et de transmission des câbles de mesure à une fréquence de : 0,5 GHz.

Les incertitudes de mesure sont données dans plusieurs tableaux du manuel de l'appareil selon les types de connecteurs utilisés, les types de *S-Parameter Test Set* mis en œuvre et selon l'étendue de fréquence paramétrée à l'appareil (3 GHz ou 6 GHz). Tous ces tableaux sont reproduits pour les deux paramètres S principaux : respectivement S_{11} (réflexion) et S_{21} (transmission).

Enfin, deux feuilles de calculs (*Worksheet*) sont annexées dans le manuel de l'appareil pour établir toute la procédure de calcul de l'erreur totale maximale de mesure selon le paramètre S choisi (S_{11} ou S_{21}).

Table 5. Typical System Performance for Devices with 50 Ohm Type-N Connectors
HP 8753C with HP 85046A, 85044A, or 85047A Test Set up to 3 GHz

Symbol	Error Terms	Uncorrected		Typical Residual after Accuracy Enhancement ^{1, 2}							
				Response Only		Response and Isolation		One-Port		Full Two-Port ³	
		dB	Linear	dB	Linear	dB	Linear	dB	Linear	dB	Linear
D	Directivity	-30	0.032	-30	0.032	-44 ⁴	0.0063	-44	0.0063	-44	0.0063
M _s	Source Match ⁵	-16 ⁶	0.16	-16	0.16	-16	0.16	-35	0.018	-35	0.018
M _l	Load Match ⁵	-16 ⁶	0.16	-16 ⁶	0.16	-16	0.16	—	—	-42	0.008
T _r	Reflection Tracking ⁵	± 1.5	+0.19 -0.16	+1.5 -1.8	0.19	+1.4 -1.6	0.17	± 0.06	0.007	± 0.06	0.007
T _t	Transmission Tracking ⁵	± 1.5 ⁷	+0.19 -0.16	± 0.20	0.026	± 0.20	0.026	—	—	± 0.05	0.006
C	Crosstalk	-90	0.000032	-90	0.000032	-100 ⁸	0.00001	—	—	-100 ⁸	0.00001
R _{v1}	Port 1 Reflection Connector Repeatability (Typical)	-65 dB or 0.00056 linear									
R _{t1}	Port 1 Transmission Connector Repeatability (Typical)	-65 dB or 0.00056 linear									
R _{v2}	Port 2 Reflection Connector Repeatability (Typical)	-65 dB or 0.00056 linear									
R _{t2}	Port 2 Transmission Connector Repeatability (Typical)	-65 dB or 0.00056 linear									
N _l	Low-Level Noise ⁹ (Noise Floor)	-100 dBm									
N _h	High-Level Noise ^{9, 9}	Magnitude: 0.004 dB or 0.00046 linear									
A _m , A _p	HP 8753 Magnitude and Phase Dynamic Accuracy Error	Refer to "Dynamic Accuracy" in this section									
S _{t1}	Port 1 Cable Transmission Phase Stability ¹⁰	0.05 x f(GHz), degrees									
S _{r1}	Port 1 Cable Reflection Stability ¹⁰	-70 dB or 0.00032 linear									
S _{t2}	Port 2 Cable Transmission Phase Stability ¹⁰	0.05 x f(GHz), degrees									
S _{r2}	Port 2 Cable Reflection Stability ¹⁰	-70 dB or 0.00032 linear									
T _{td}	Transmission Tracking Drift (Typical)	Magnitude: 0.0015 x Δ°C linear Phase: [0.1 + 0.15 x f(GHz)] x Δ°C, degrees									
T _{rd}	Reflection Tracking Drift (Typical)	Magnitude: 0.0015 x Δ°C linear Phase: ¹¹ [0.1 + 0.15 x f(GHz)] x Δ°C, degrees									

1 Accuracy enhancement procedures are performed using HP 85032B 50Ω type-N calibration kit. Environmental temperature is 25°C ± 5°C at calibration; ± 1°C from calibration temperature must be maintained for valid measurement calibration.

2 With IF bandwidth of 10 Hz.

3 One-path 2-port calibration with HP 85044A.

4 With impedance-matched load.

5 Includes effects of switch repeatability.

6 Applies over most of the frequency range. Refer to test set manual for detailed specifications.

7 HP 85044A typically has a -5 dB offset.

8 Typically, crosstalk after accuracy enhancement is -110 dB.

9 High-level noise is the RMS of a continuous measurement of a short circuit or thru. Refer to the trace noise performance test.

10 Arrived at by bending HP 11857D cables out perpendicular to front panel and reconnecting. Stability is much better with less flexing.

11 Arrived at using HP 11857D cables and full 2-port calibration. Drift is much better without cables and with 1-port calibration. For this case, drift typically is [0.1 + 0.05 x f(GHz)] x Δ°C, degrees.

Fig. 31 : Tableau reprenant tous les types d'incertitudes de mesure pour un analyseur de réseau vectoriel HP 8753C avec une interface de connecteurs Type N 50 Ω utilisant différents modèles de *S-parameter Test Set* (par ex. HP 85047A) dans une étendue de fréquence paramétrée à 3 GHz. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

Table 10. Reflection Measurement Uncertainty Worksheet

In the columns below, enter the appropriate values for each term. Frequency: _____

Error Term	Symbol	dB Value	Linear Value
Directivity	D	_____	_____
Reflection tracking	T_r	_____	_____
Source match	M_s	_____	_____
Load match	M_l	_____	_____
Dynamic accuracy ¹			
Magnitude	A_m	_____	_____
Phase	A_p	_____	_____
S11	S11	_____	_____
S21	S21	_____	_____
S12	S12	_____	_____
Noise floor ²	N_l	_____	_____
High level noise ²	N_h	_____	_____
Connector reflection repeatability	R_{r1}, R_{r2}	_____	_____
Connector transmission repeatability	R_{t1}, R_{t2}	_____	_____
Magnitude drift due to temperature	$T_{rd}(\text{mag})$	_____	_____
Phase drift due to temperature	$T_{rd}(\text{phase})$	_____	_____
Cable reflection stability	S_r	_____	_____
Cable transmission stability	S_t	_____	_____

Magnitude

Combine Systematic Errors. In the space provided, enter the appropriate linear values from the list of errors. Then combine these errors to obtain the total sum of systematic errors.

D + S₁₁ _____ + _____ = _____ [k]
 $(T_r \times S11)$ _____ (_____ × _____) = _____ [l]
 $(S_{r1} + M_s) \times (S11) \times (S11)$ _____ (_____ + _____) × (_____ × _____) = _____ [m]
 $M_l \times S21 \times S12$ _____ (_____ × _____ × _____) = _____ [n]
 $(A_m) \times (S11)$ _____ (_____ × _____) = _____ [o]
Subtotal: k + l + m + n + o _____ + _____ + _____ + _____ + _____ = _____ [S]

Combine Random Errors. In the space provided, enter the appropriate linear values from the list of errors. Then combine these errors in an RSS fashion to obtain a total sum of the random errors.

$R_{r1} + 2 \times (R_{r1}) \times (S11) + (R_{r1}) \times (S11) \times (S11)$ _____ + 2 × (_____ × _____) + (_____ × _____ × _____) = _____ [y]
 $(R_{r2}) \times (S21) \times (S12)$ _____ (_____ × _____) × (_____ × _____) = _____ [z]
 $\sqrt{y^2 + z^2}$ _____ $\sqrt{\text{_____}^2 + \text{_____}^2}$ = _____ [R]
 S + R _____ + _____ = _____ [V]

Total Magnitude Errors:
 $E_{m(\text{linear})} = V_r + T_{rd}(\text{mag}) \times S11$ _____ + (_____ × _____) = _____
 $E_{m(\text{log})} = 20 \text{ Log} (1 \pm E_{m(\text{linear})}/S11)$ _____ $20 \text{ Log} (1 \pm \text{_____}/\text{_____})$ = _____ dB

Phase
 $E_p = \text{Arcsin}[(V_r - A_m \times S11)/S11] + T_{rd}(\text{phase}) + 2 \times S_{r1} + A_p$ _____ $\text{Arcsin}[(\text{_____} - \text{_____} \times \text{_____})/\text{_____}] + \text{_____} + 2 \times \text{_____} + \text{_____} = \pm \text{_____ degrees}$

1. With IF bandwidth of 10 Hz.
 2. Included in dynamic accuracy.

Fig. 32 : Feuille de calcul (Worksheet) de l'erreur totale maximale pour une mesure du coefficient de réflexion (par ex. S₁₁) selon les différents paramètres d'incertitudes de mesure d'un analyseur de réseau vectoriel HP 8753C. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

Procédure de calcul de l'erreur totale maximale de mesure du paramètre S_{11} pour un analyseur de réseau vectoriel Hewlett Packard HP 8753C : $|\Delta S_{11 \max}|$

Error Term	Symbol	Linear Value
Directivity	D	0,0063
Reflection tracking	T_r	0,007
Source match	M_s	0,018
Load match	M_l	0
Dynamic accuracy ¹		
Magnitude	A_m	0,035
Phase	A_p	5°
S11	S11	
S21	S21	
S12	S12	
Noise floor ²	N_l	
High level noise ²	N_h	0,00046
Connector reflexion repeatability	R_{r1}, R_{r2}	0,00056
Connector transmission repeatability	R_{t1}, R_{t2}	0,00056
Magnitude drift due to temperature	$T_{rd} \text{ (mag)}$	0,018
Phase drift due to temperature	$T_{rd} \text{ (phase)}$	3,5
Cable reflection stability	S_r	0,00032
Cable transmission stability	S_t	0,025
¹ With IF bandwidth of 10 Hz.		
² Included in dynamic accuracy.		

Remarque : les termes *Dynamic accuracy* A_m et A_p ont dû être relevés sur les graphiques suivants.

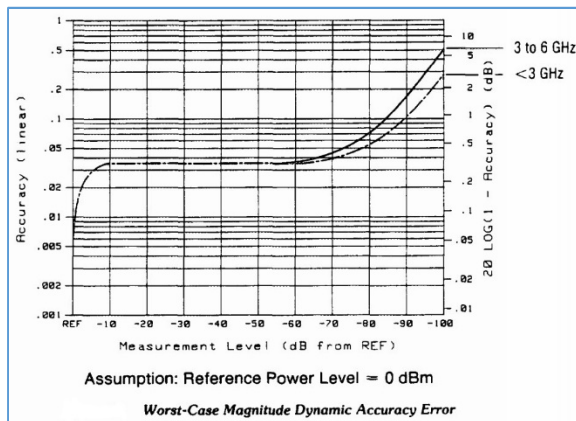


Fig. 33 : Graphique de la précision du module de la dynamique de mesure pour un niveau de référence de 0 dBm. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

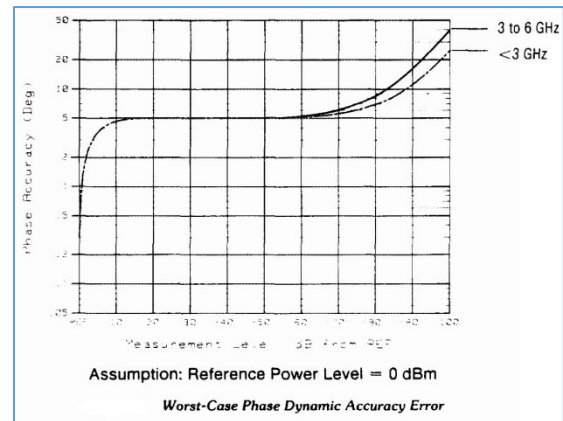


Fig. 34 : Graphique de la précision de l'angle de phase de la dynamique de mesure pour un niveau de référence de 0 dBm. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

Remarque : les termes *Magnitude drift due to temperature* T_{rd} (mag) et *Phase drift due to temperature* T_{rd} (phase) ont dû être relevés sur les graphiques suivants.

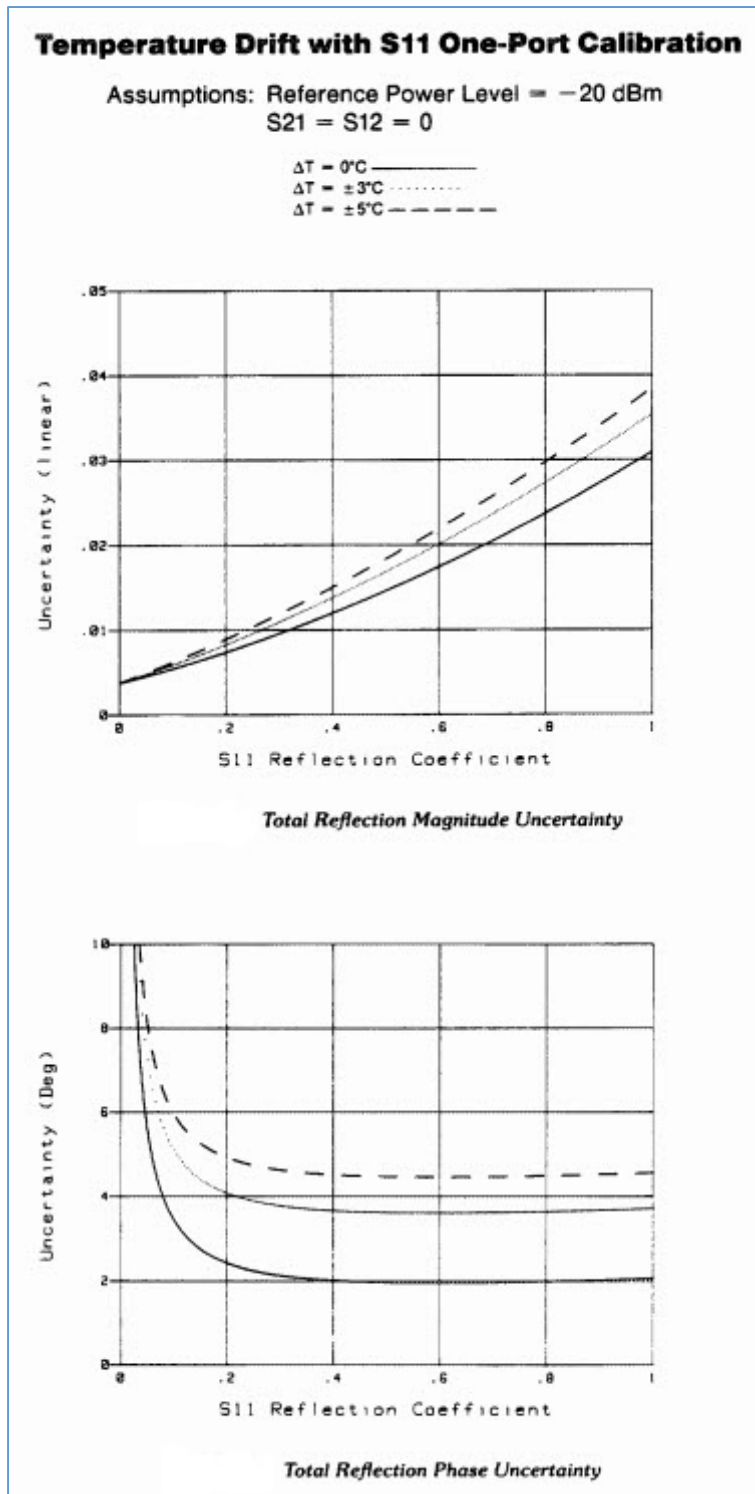


Fig. 35 : Graphiques des incertitudes de mesure (module et phase) dues à la dérive en température pour un niveau de référence de -20 dBm. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

Calcul de l'erreur totale maximale de mesure $|\Delta S_{11 \max}|$ (HP 8753C)

Magnitude :

Combine Systematic Errors :

$$[k] = D + S = 0,0063 + 0,00032 = 0,000662$$

$$[l] = T_r \times S_{11} = 0,007 \times S_{11}$$

$$[m] = (S_{r1} + M_s) \times S_{11} \times S_{11} = (0,00032 + 0,018) \times S_{11}^2 = 0,01832 \times S_{11}^2$$

$$[n] = M_l \times S_{21} \times S_{12} = 0$$

$$[o] = A_m \times S_{11} = 0,035 \times S_{11}$$

$$[S] = \text{Subtotal} = k + l + m + n + o$$

$$[S] = 0,00062 + 0,007 S_{11} + 0,01832 S_{11}^2 + 0,035 S_{11}$$

$$[S] = 0,00062 + 0,042 S_{11} + 0,01832 S_{11}^2$$

Combine Random Errors :

$$[y] = R_{r1} + 2 \times R_{t1} \times S_{11} + R_{r1} \times S_{11} \times S_{11}$$

$$[y] = 0,00056 + 2 \times 0,00056 \times S_{11} + 0,00056 \times S_{11}^2$$

$$[y] = 0,00056 + 0,00112 S_{11} + 0,00056 S_{11}^2$$

$$[z] = R_{r2} \times S_{21} \times S_{12} = 0$$

$$[R] = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + 0^2} = \sqrt{y^2} = y = 0,00056 + 0,00112 S_{11} + 0,00056 S_{11}^2$$

$$V_r = S + R$$

$$V_r = 0,00062 + 0,042 S_{11} + 0,01832 S_{11}^2 + 0,00056 + 0,00112 S_{11} + 0,00056 S_{11}^2$$

$$V_r = 0,0018 + 0,0362 S_{11} + 0,01888 S_{11}^2$$

Total Magnitude Errors :

$$E_{rm} (\text{linear}) = V_r + T_{rd} (\text{mag}) \times S_{11}$$

$$E_{rm} = 0,0018 + 0,0362 S_{11} + 0,01888 S_{11}^2 + 0,018 S_{11}$$

$$E_{rm} = 0,0018 + 0,0542 S_{11} + 0,01888 S_{11}^2$$

Phase :

$$E_p = \text{Arcsin} [(V_r - A_m \times S_{11}) / S_{11}] + T_{rd} (\text{phase}) + 2 \times S_{t1} + A_p$$

Remarque : pour le calcul de l'erreur totale d'une mesure de coefficient de réflexion, les valeurs suivantes s'annulent.

- C = 0 Crosstalk
- M_l = 0 Load Match
- T_t = 0 Transmission Tracking
- R_{r2} = 0 Port 2 Reflection Connector Repeatability (Typical)
- R_{t2} = 0 Port 2 Transmission Connector Repeatability (Typical)
- S_{r2} = 0 Port 2 Cable Reflection Stability
- S_{t2} = 0 Port 2 Cable Transmission Phase Stability

On peut enfin déterminer la valeur de $|\Delta S_{11 \max}| = |E_{rm}|$

$$|\Delta S_{11 \max}| = |E_{rm}| = |0,0018 + 0,0542 \cdot S_{11} + 0,01888 \cdot S_{11}^2|$$

Remarque sur le module d'une somme (inégalité triangulaire) :

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Comme $|S_{11}^2| = |S_{11}|^2$, on peut supposer raisonnablement que $|S_{11}|$ et $|S_{11}|^2$ sont à l'origine de vecteurs alignés dans le plan complexe (S_{11} est égal à lui-même), ce qui amène le cas unique d'égalité dans l'inégalité triangulaire. On peut donc écrire :

$$|\Delta S_{11 \max}| = |E_{rm}| = 0,0018 + 0,0542 \cdot |S_{11}| + 0,01888 \cdot |S_{11}|^2$$

Ici, l'erreur totale maximale de mesure due au VNA (HP 8753C) devient une fonction quadratique de $|S_{11}|$ (fonction du second degré).

$ \Delta S_{11 \max} = 0,0018 + 0,0542 \cdot S_{11} + 0,01888 \cdot S_{11} ^2$ VNA HP 8753C

Calcul de la dispersion de l'erreur des paramètres S_{ij} du VNA utilisé : Variance de Type B et incertitude-type du Type B $D_{\Delta S_{ij}}$ (selon GUM publié par le JCGM du BIPM)

C'est ici qu'interviennent les calculs des statistiques et des probabilités.

Ce qu'il faut retenir d'important c'est que l'on effectue une seule mesure (S_{ij} qui donnera en final la valeur de Z_D) et que l'on cherche à déterminer sa dispersion en fonction de l'erreur totale maximale $|\Delta S_{ij \max}|$ due au VNA. Il ne s'agit donc pas d'effectuer « n » mesures différentes de Z_D et d'en établir une statistique.

Le JCGM/WG 1 (Joint Committee for Guides in Metrology / Working Group 1) du BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) a rédigé en Septembre 2008 une publication sous le n° JCGM 100:2008(F), selon l'acronyme **GUM** et dont l'intitulé complet est : « *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of Uncertainty in Measurement* » et dont il existe une version en français (F) ; « Évaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ».

C'est dans ce guide qu'est décrite la méthode d'évaluation de Type B de l'incertitude-type ou de la variance (dispersion). Il s'agit, selon cette méthode, d'évaluer l'incertitude d'une seule mesure (S_{ij}) en fonction d'un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de la (des) grandeur(s) mesurée(s). L'ensemble d'informations proviennent, entre autres, des spécifications de l'appareil de mesure publiées par le constructeur (calcul de $|\Delta S_{ij \max}|$ due au VNA), des données fournies par des certificats d'étalonnage, etc. [GUM 4.3.1].

En statistique, lorsqu'on dispose d'un tableau de « n » mesures, on peut en calculer la moyenne arithmétique (somme des valeurs « X_i » divisée par le nombre « n » de valeurs) :

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i . \text{ [Moyenne arithmétique des observations, GUM 4.1.4]} .$$

Si « X_i » est une variable aléatoire, alors l'espérance mathématique « \bar{x}_i » est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, en répétant un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Dans ce cas, la valeur moyenne « \bar{X}_i » est utilisée comme estimation de l'espérance mathématique « \bar{x}_i » et on écrit $\bar{x}_i = \bar{X}_i$.

Les estimations non évaluées par des expériences répétées (pas par un grand nombre d'expériences aléatoires) doivent être obtenues par d'autres méthodes. Il s'agit donc ici de déterminer une estimation à partir d'une seule mesure en tenant compte des incertitudes de l'appareil de mesure. C'est ce que nous allons décrire ci-dessous dans la méthode d'évaluation du Type B reprise dans le GUM JCGM 100:2008(F) dont les références de source ont été mentionnées ci-dessus.

Pour une estimation « x_i » d'une grandeur « X_i » qui est obtenue par une seule mesure, la variance estimée associée « $u^2(x_i)$ » ou l'incertitude-type « $u(x_i)$ » est obtenue à partir des spécifications d'incertitudes de mesure données par le constructeur du VNA.

[Évaluation de Type B de l'incertitude-type, GUM, 4.3.1].

Si l'incertitude de l'appareil de mesure, incertitude indiquée par le constructeur (par exemple $|\Delta S_{ij \max}|$) est donnée comme étant un multiple déterminé (facteur d'élargissement « k ») d'écart-type « σ » (*Standard Deviation*), alors l'incertitude-type

« $u(x_i)$ » est : $u(x_i) = \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{k}$ et la variance de Type B (dispersion) estimée est :

$$D_{\Delta S_{ij}} = u^2(x_i) = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{k^2}. \quad [\text{Variance estimée, GUM 4.3.3}].$$

L'incertitude fournie pour « x_i » n'est pas nécessairement donnée par le constructeur du VNA comme un multiple d'un écart-type comme ci-dessus. L'incertitude fournie peut définir un intervalle correspondant à un niveau de confiance, par exemple de 90 %, 95 % ou 99 %. Sauf indication contraire, on peut supposer qu'une loi normale (Gaussienne, courbe en cloche) a été utilisée pour calculer l'incertitude fournie et retrouver l'incertitude-type de « x_i » en divisant la valeur de l'incertitude fournie par le facteur d'élargissement « k » approprié pour la loi normale.

Niveau de confiance p (pourcentage)	Facteur d'élargissement k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Fig. 36 : Valeur du facteur d'élargissement « k » (ici noté « k_p ») qui donne un intervalle correspondant au niveau de confiance « p » en supposant la loi normale (Gaussienne). Source : BIPM JCGM 100:2008(F), GUM : Évaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, première édition Septembre 2008, page 73.

En résumé, le calcul de la dispersion de l'erreur des paramètres S_{ij} du VNA utilisé, c'est-à-dire la variance de type B s'établi comme suit pour un écart-type de 3σ (facteur d'élargissement $k = 3$) donnant un niveau de confiance de 99,73 % pour une loi normale (Gaussienne). La variance est le carré de l'écart-type. Si $k = 3$, alors $k^2 = 9$.

$$D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{9} ; 3\sigma ; \text{niveau de confiance} = 99,73 \%$$

Pour un VNA HP 8753C, le niveau de confiance donné par le manuel est de 99,9 %, ce qui donne un facteur d'élargissement proche de 3,28 ; ($3,28^2 = 10,76$).

$$D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{10,76} ; 3,28\sigma ; \text{niveau de confiance} = 99,9 \%$$

DETERMINING EXPECTED SYSTEM PERFORMANCE

The uncertainty equations, dynamic accuracy calculations, and tables of system performance values provided in the preceding pages can be used to calculate the expected system performance. The following pages explain how to determine the residual errors of a particular system and combine them to obtain total error-corrected residual uncertainty values, using worksheets provided. The uncertainty graphs at the beginning of this *System Performance* section are examples of the results that can be calculated using this information.

Procedures

Table 10 is a worksheet used to calculate the residual uncertainty in reflection measurements. Table 11 is a worksheet for residual uncertainty in transmission measurements. Determine the linear values of the residual error terms and the nominal linear S-parameter data of the device under test as described below and enter these values in the worksheets. Then use the instructions and equations in the worksheets to combine the residual errors for total system uncertainty performance. The resulting total measurement uncertainty values have a confidence factor of 99.9%.

Fig. 37 : Procédure pour obtenir l'erreur totale de mesure à partir de toutes les incertitudes de mesure des paramètres S d'un VNA HP 8753C. L'incertitude totale de mesure atteint dans ces conditions un niveau de confiance de 99,9 %. Source : Hewlett Packard, HP 8753C Network Analyzer Operating Manual, General Information and Specifications, 1er Avril 1989, USA.

Bref rappel sur la loi normale (Gaussienne)

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale, également appelée loi Gaussienne, est une des lois de probabilité la plus adaptée pour modéliser des phénomènes physiques issus de plusieurs phénomènes aléatoires. La loi normale dépend de deux paramètres : son espérance mathématique « μ » (valeur moyenne estimée) et son écart-type « σ ». La densité de probabilité de la loi normale d'espérance « μ » (moyenne) et d'écart-type « σ » est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Le graphe de cette fonction donne une courbe appelé courbe de Gauss (du nom de Johan Carl Friedrich Gauß, mathématicien, astronome et physicien allemand, 1777-1855). Cette courbe est plus connue sous le nom de courbe en cloche. En général, on représente cette courbe sous forme réduite avec une espérance (moyenne) nulle $\mu = 0$ et un écart-type unitaire $\sigma = 1$. Dans ce cas, la fonction est appelé loi normale centrée réduite ou loi normale standard.

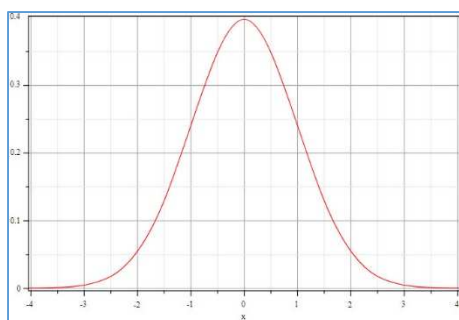


Fig. 38 : Graphe de la fonction de la loi normale centrée réduite, courbe de Gauss ou courbe en cloche. Source : Wikipedia.

La densité de probabilité de la loi normale est représentée par la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Le calcul de cette surface s'effectue par une intégrale de la fonction. La surface totale est celle qui est intégrée pour les valeurs d'abscisse comprises en $-\infty$ et $+\infty$. Cette surface est unitaire pour une loi normale centrée réduite.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Soit $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Ceci représente la somme des probabilités élémentaires pour une variable aléatoire. On peut rechercher la densité de probabilité pour un écart-type donné, par exemple pour un écart-type de $a = 1\sigma$, de $a = 2\sigma$ ou de $a = 3\sigma$. Le coefficient devant « σ » est appelé le facteur d'élargissement « k » ; en observant la figure ci-dessous, on comprendra intuitivement la raison de cette appellation. L'intégrale est alors définie pour un intervalle borné entre $-a$ et $+a$. Le résultat de ce calcul va nous donner ce qu'on appelle le niveau de confiance exprimé en %.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\mathbb{P}(-a \leq x \leq +a) = \int_{-a}^{+a} f(x) dx$$

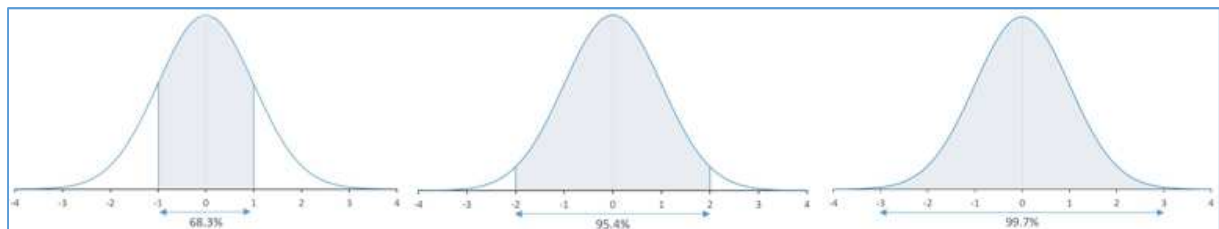


Fig. 39 : Graphes d'une loi normale centrée réduite pour laquelle on donne la densité de probabilité pour des valeurs comprises dans un intervalle déterminé par différentes valeurs d'écart-type. La valeur de la surface ombrée représente le niveau de confiance exprimé en pourcents. Source : <https://commentprogresser.com/statistique-distribution-loi-normale.html>.

L'écart-type (*Standard Deviation*) est un indicateur de mesure de la dispersion des valeurs d'une loi de distribution de probabilité. Il est défini comme la racine carrée de la variance (dispersion) ou, de manière équivalente, comme la moyenne quadratique (moyenne de la somme des carrés) des écarts par rapport à la moyenne (différences entre les valeurs x_i et la moyenne \bar{x}).

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

En résumé :

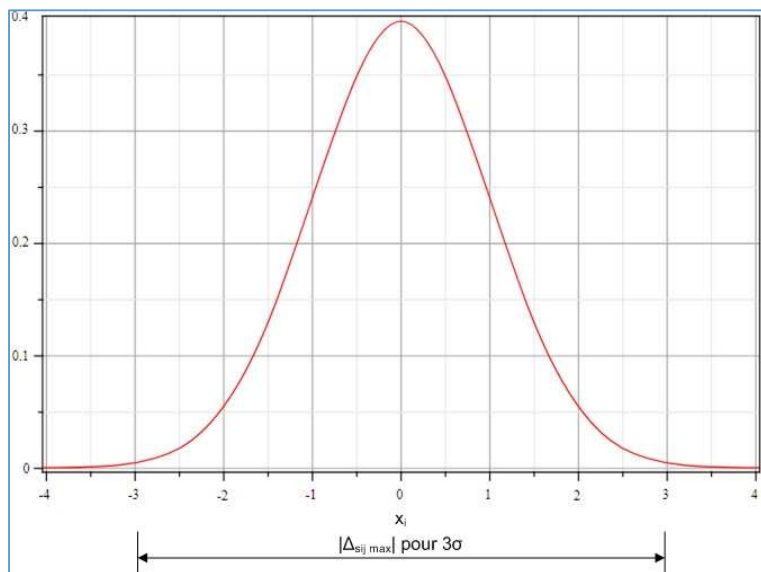


Fig. 40 : Graphe d'une loi normale centrée réduite sur lequel a été reporté l'intervalle défini par l'erreur totale maximale d'un VNA $|\Delta_{Sij \max}|$ pour une valeur d'écart-type donné de 3σ . Cela permet d'en déduire la variance associée afin de déterminer l'incertitude-type de Type B ou la variance de Type B. Graphisme : ON4IJ.

Propagation des incertitudes de mesure des paramètres S_{ij} vers les incertitudes de mesure de l'impédance sous test Z_D : $D\Delta_{Sij} \rightarrow Dz$

Explication du concept de la propagation des incertitudes par un exemple simple :

Lorsqu'on procède à la mesure d'une résistance ohmique, on utilise en général un multimètre dont on place le sélecteur sur un calibre de la fonction Ohm-mètre. En réalité, on applique une différence de potentiel aux bornes de la résistance de façon à y faire circuler un courant. On mesure la tension aux bornes de la résistance au moyen d'un voltmètre et on mesure le courant qui circule à travers la résistance au moyen d'un ampèremètre. En appliquant la loi d'Ohm, on obtient une valeur de résistance à partir d'une valeur de tension et d'une valeur de courant : $R = U / I$.

Dans cet exemple, il existe une incertitude de mesure au niveau du voltmètre et une incertitude de mesure au niveau de l'ampèremètre. Ce que l'on recherche, c'est en final à déterminer l'incertitude de mesure de la résistance. On suppose en première approximation, dans cet exemple, que l'incertitude de mesure du voltmètre et celle de l'ampèremètre ne sont pas corrélées : il s'agit de deux appareils de mesure différents et autonomes.

Pour résoudre ce problème, on va faire appel aux dérivées partielles pour exprimer la variation de la mesure de la résistance par rapport à la variation de la tension mesurée d'une part, et la variation de la mesure de la résistance par rapport à la variation du courant mesuré d'autre part.

$$R = \frac{U}{I}$$

Soit \bar{R} , la valeur moyenne de R ;

soit \bar{U} , la valeur moyenne de U ;

soit \bar{I} , la valeur moyenne de I ,

on a :

$$\bar{R} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{\bar{I}} = \frac{\bar{R}}{\bar{U}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} = -\frac{\bar{U}}{\bar{I}} \cdot \frac{1}{\bar{I}} = -\bar{R} \cdot \frac{1}{\bar{I}} = -\frac{\bar{R}}{\bar{I}}$$

La variance composée de la fonction à deux variables $R = f(U,I)$ est formulée par :

$$V_R = \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \cdot V_U + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot V_I + 2 \cdot \frac{\partial R}{\partial U} \cdot \frac{\partial R}{\partial I} \cdot V_{UI} \quad [\text{Variance composée, GUM 5.1.2 et 5.2.2}].$$

Ici, le facteur V_{UI} exprime la covariance des deux incertitudes de mesure de U et de I . Tout se passe comme si les incertitudes du voltmètre et de l'ampèremètre étaient corrélées. Comme nous avons supposé en première approximation qu'il n'y a pas de corrélation entre les mesures de tension et de courant, on considère que la covariance est nulle. Dans ces conditions, le facteur V_{UI} s'annule et on obtient :

$$V_R = \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \cdot V_U + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot V_I$$

$$V_R = \left(\frac{\bar{R}}{\bar{U}}\right)^2 \cdot V_U + \left(-\frac{\bar{R}}{\bar{I}}\right)^2 \cdot V_I$$

$$V_R = \frac{\bar{R}^2}{\bar{U}^2} \cdot V_U + \frac{\bar{R}^2}{\bar{I}^2} \cdot V_I$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_R}{\bar{R}^2} = \frac{V_U}{\bar{U}^2} + \frac{V_I}{\bar{I}^2}$$

Or l'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma_R = \sqrt{V_R}$. On peut donc exprimer l'incertitude-type relative de la mesure de résistance par une forme RSS (*Root Sum Square*, racine de la somme des carrés) :

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

Ceci représente un exemple de la propagation de l'incertitude de la mesure de R à partir des incertitudes des grandeurs mesurées de U et de I.

Dans ce qui va suivre, nous allons rechercher la manière de propager la variance de la mesure des paramètres S ($D_{\Delta S_{ij}}$) vers la variance de la mesure de l'impédance (D_z). Nous allons analyser ce concept en deux étapes pour bien le comprendre :

- Propagation de la variance pour des grandeurs scalaires :

Nous reprendrons l'exemple simple qui a été décrit ci-dessus en ce qui concerne la mesure de la valeur « R » d'une résistance à partir de deux grandeurs mesurées qui sont la tension « U » et le courant « I ».

- Propagation de la variance pour des grandeurs vectorielles :

C'est ici que nous allons analyser le concept de la propagation de la variance d'une grandeur vectorielle (variable complexe) « $D_{\Delta S_{ij}}$ » vers une autre grandeur vectorielle (variable complexe) « D_z ».

Dans les deux étapes, nous arriverons à une expression mathématique écrite sous la forme d'un calcul matriciel. Vous trouverez ci-dessous un bref rappel sur le calcul matriciel ; vous devrez uniquement connaître la multiplication de matrices et la transposée d'une matrice. Cet outil mathématique devient pratiquement inévitable pour retrouver la démarche qui permet d'obtenir la formulation de la propagation de la variance d'une grandeur mesurée à celle d'une autre grandeur. Heureusement, de nombreuses simplifications dans les calculs vont nous permettre d'aboutir à un résultat compact, ce qui va faciliter en final la détermination des incertitudes dans les mesures d'une impédance selon les trois méthodes qui ont été décrites ci-dessus.

L'expression de la propagation de la variance en calcul matriciel est très compacte :

- Dans le cas de grandeurs scalaires, on obtient :
$$v_y = C_x \cdot U_x \cdot C_x^T$$

v_y représente la variance de la mesure ;

C_x représente la matrice des coefficients de sensibilité de la mesure (dérivées partielles) ;

U_x représente la matrice de variance-covariance des grandeurs mesurées ;

C_x^T représente la transposée de la matrice C_x .

- Dans le cas de grandeurs vectorielles, on obtient :
$$U_y = J_x \cdot U_x \cdot J_x^T$$
 ;
[GUM supplement 2, 6.2.1.3].

U_y représente la matrice de variance-covariance des grandeurs de la mesure, ici

D_Z ;

J_x représente la matrice Jacobienne des coefficients de sensibilité de la mesure,

ici $J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{ij}}$;

U_x représente la matrice de variance-covariance des grandeurs mesurées,

ici $D_{\Delta S_{ij}}$;

J_x^T représente la transposée de la matrice J_x .

En résumé, ce que l'on veut obtenir, c'est ceci :
$$D_Z = J \cdot D_{\Delta S_{ij}} \cdot J^T$$
.

Il y avait donc lieu d'effectuer quelques recherches pour trouver d'où vient cette formule.

Dans ce qui est décrit ci-dessous, nous nous sommes appuyés sur plusieurs publications dont les sources sont les suivantes :

1. *Propagating S-parameter uncertainties to other measurement quantities*, Nick M RIDLER and Martin J SALTER, Centre for Electromagnetic and Time Metrology, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, TW11 0LW, United Kingdom, December 2001 ;
2. *Evaluating and expressing uncertainty in complex S-parameter measurements*, Conference ARFTG, Nick M RIDLER and Martin J SALTER, Centre for Electromagnetic and Time Metrology, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, TW11 0LW, United Kingdom, 2004 ;
3. *Propagating Measurement Uncertainty to Microwave Amplifier Nonlinear Behavioral Models*, Laurence T. Stant, *Student Member, IEEE*, Martin J. Salter, *Member, IEEE*, Nick M. Ridler, *Fellow, IEEE*, Dylan F. Williams, *Fellow, IEEE* and Peter H. Aaen, *Senior Member, IEEE*, Publication of the US Government, This work made use of facilities at n3m-labs, University of Surrey, Guildford, Surrey GU2 7XH, United Kingdom ;
4. GUM : JCGM 100:2008(F) *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*, Joint Committee for Guides in Metrology / Working Group 1, BIPM Bureau International des Poids et Mesures, Septembre 2008 ;
5. GUM Supplement 1 : JCGM 101:2008 *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of Uncertainty in Measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, Joint Committee for Guides in Metrology / Working Group 1, BIPM Bureau International des Poids et Mesures, 2008 ;

6. GUM Supplement 2 : JCGM 102:2011 *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*, Joint Committee for Guides in Metrology / Working Group 1, BIPM Bureau International des Poids et Mesures, October 2011 ;
7. *Uncertainty Propagation for Measurements with Multiple Output Quantities*, Michael Dobbert, Bart Schrijver, Keysight Technologies, 1400 Fountaingrove Parkway, Santa Rosa, CA, 95403, USA ;
8. *Outil & Méthodes pour la Physique, 40 Exercices et problèmes corrigés*, Jimmy Roussel, Professeur agrégé de physique, FEMTO, La physique enseignée, programme des cours 1^{er} cycle universitaire et Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE), analyse dimensionnelle, incertitude, modélisation, équations différentielles, Exercice corrigé « Mesurer, c'est évaluer », erreur aléatoire, erreur systématique, écart-type, écriture scientifique, propagation des erreurs, Janvier 2020 ;
9. *Notion d'erreurs et d'incertitudes en sciences expérimentales*, Jean-Marie Biansan, Lycée Lapérouse (CPGE), Stéphane Blat, Lycée Toulouse Lautrec / ESPE, Carole Nicoules, Lycée Ozenne, Jean-François Olive, IUT Mesures Physiques / IRAP, Stage PAF (Plan Académique de Formation), Académie de Toulouse, Février 2017.

Deux auteurs ayant rédigé plusieurs publications sur le sujet de la propagation des incertitudes des mesures, entre autres sur les paramètres S : **Ridler & Salter**



Fig. 41 : Ridler et Salter. Source : *Propagating Measurement Uncertainty to Microwave Amplifier Nonlinear Behavioral Models*, Laurence T. Stant, *Student Member, IEEE*, Martin J. Salter, *Member, IEEE*, Nick M. Ridler, *Fellow, IEEE*, Dylan F. Williams, *Fellow, IEEE* and Peter H. Aaen, *Senior Member, IEEE*, Publication of the US Government, This work made use of facilities at n3m-labs, University of Surrey, Guildford, Surrey GU2 7XH, United Kingdom.

Bref rappel sur le calcul matriciel : multiplication et transposée.

En mathématiques, une matrice est tout simplement un tableau à deux entrées et dont les éléments qui le constituent représentent des valeurs ou des variables. Les matrices sont composées d'un nombre de « m » lignes et de « n » colonnes. La taille de la matrice est déterminée par le couple (m,n). La position des éléments de la matrice est indiquée par deux indices à chaque élément. Le premier indice d'un élément indique le numéro de la ligne du tableau et le second indique celui de la colonne. Le calcul matriciel permet d'appliquer diverses opérations entre les tableaux écrits sous forme de matrices. Les matrices sont parfois associées à un vecteur ou à une fonction à plusieurs variables.

Si vous êtes allergique aux mathématiques des matrices, vous pouvez poursuivre la lecture au paragraphe suivant qui donne directement le résultat de $D_Z = J \cdot D_{\Delta Sij} \cdot J^T$

Matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matrice ligne :

$$B = (b_{11} \quad b_{12})$$

Matrice colonne :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Multiplication de matrices carrés : effectuer la somme des produits des éléments un à un, d'une ligne par une colonne

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

La formulation contractée pour le produit matriciel $C = A \cdot B$ du calcul de l'élément

« a_{ij} » situé à la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne est la suivante : $c_{ij} = \sum_{k=1}^2 (a_{ik} \cdot b_{kj})$.

Multiplication d'une matrice par un scalaire réel « λ » :

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne : produit scalaire

$$A \cdot B = (a_{11} \quad a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

Multiplication d'une matrice colonne par une matrice ligne : produit externe

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot (b_{11} \quad b_{12}) = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} \\ a_{21} \cdot b_{11} & a_{21} \cdot b_{12} \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice carrée :

$$A \cdot B = (a_{11} \quad a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \quad a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22})$$

Propriétés de la multiplication de matrices

- **La multiplication des matrices n'est pas commutative !!!**

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

En revanche, dans une multiplication de plusieurs matrices, s'il y a la présence d'un facteur scalaire réel « λ », ce dernier, et uniquement celui-ci, peut se placer indistinctement n'importe-où dans le produit :

$$\lambda \cdot A \cdot B \cdot C = A \cdot \lambda \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \lambda \cdot C = A \cdot B \cdot C \cdot \lambda$$

- La multiplication des matrices est associative :

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

Transposée d'une matrice : A^T

Les notations de la transposée d'une matrice peuvent prendre les formes suivantes :

$$A^T \text{ ou } A^t \text{ ou } {}^t A \text{ ou } A'$$

Nous utiliserons la notation A^T selon la norme ISO 80000-2 2009, article 2-15.7.

La transposée d'une matrice A de taille (m,n) est la matrice A^T de taille (n,m) qui est obtenue en changeant les lignes et les colonnes de A . Pour une matrice carrée, cela revient à miroiter la position des éléments a_{ij} selon une diagonale partant du 1^{er} élément a_{11} ; les éléments de la diagonale restant en place. La transposée d'une matrice ligne devient une matrice colonne ; la transposée d'une matrice colonne devient une matrice ligne.

Transposée d'une matrice carrée :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice ligne :

$$\text{Si } A = (a \ b) \text{ alors } A^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice colonne :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ alors } A^T = (a \ b)$$

Remarque : dans plusieurs publications, lorsqu'on mentionne un vecteur (matrice) colonne, celui sera généralement noté par sa transposée :

Le vecteur noté $A^T = (a \ b)$ signifie le vecteur colonne $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, cela permet de gagner des interlignes dans la mise en page de la rédaction des publications.

Propriétés de la transposée des matrices

Transposée d'un produit par un scalaire réel « λ » :

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$$

Transposée d'un produit de matrices : attention !

$$\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

Propagation de la variance pour des grandeurs scalaires

En reprenant l'exemple de la mesure d'une résistance par la mesure d'une tension et d'un courant, on obtient l'expression suivante :

$$Y = f(U, I) \text{ et } f(U, I) = R = \frac{U}{I}$$

« U » et « I » sont des grandeurs scalaires appelées d'entrée (grandeurs mesurées) et « Y » (c'est-à-dire « R ») est une grandeur scalaire de sortie (résultat de la mesure) qui est appelée le mesurande. L'objectif d'un mesurage de la résistance consiste à déterminer la valeur du mesurande. [Mesurage, GUM 3.1.1].

Rappelons quelques notions : [GUM]

- La variance estimée u^2 qui caractérise une composante de l'incertitude est calculée à partir d'une série d'observations ou est évaluée par l'utilisation de connaissances disponibles (incertitudes de mesure de l'appareil de mesure utilisé) ; [GUM 3.3.5].
- Dans de nombreux cas, un *mesurande* Y n'est pas mesuré directement mais il est déterminé à partir de N autres grandeurs X_1, X_2, \dots, X_N à travers une relation fonctionnelle $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$; [GUM 4.1.1].
- Une manière générique de noter X_1, X_2, \dots, X_N est X_i pour $i=1, 2, \dots, N$.
- Dans notre cas, $Y = f(X_1, X_2)$ est $Y = f(U, I) = R = \frac{U}{I}$.
- Les grandeurs X_1, X_2 sont appelées les grandeurs d'entrée (U, I).
- La grandeur Y est appelée la grandeur de sortie (*mesurande*) (R).
- Une estimation du *mesurande* Y , notée y , est obtenue par l'équation $Y = f(X_1, X_2)$ en utilisant les estimations d'entrée x_1, x_2 pour les valeurs des grandeurs X_1, X_2 . Ainsi, l'estimation de sortie y , qui est le résultat du *mesurage*, est donnée par : $y = f(x_1, x_2)$; [GUM 4.1.4].
- Dans notre cas : $y = f(u, i) = r$.
- L'incertitude-type de y est obtenue par une composition appropriée des incertitudes-types des estimations d'entrée x_1, x_2 . Cette incertitude-type composée de l'estimation y est notée $u_c(y)$; [GUM 5.1.1].
- Dans le cas où les grandeurs d'entrées sont non corrélées, c'est-à-dire que toutes les grandeurs d'entrée sont indépendantes, l'incertitude-type composée $u_c(y)$ est la racine carrée de la variance composée $u_c^2(y)$, donnée par :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) \text{ et, plus simplement :}$$

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot u^2(x_2) \text{ avec } y = f(x_1, x_2).$$

L'incertitude-type composée $u_c(y)$ est un écart-type estimé et caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuée au *mesurande* Y ; [GUM 5.1.2].

- Dans notre cas : $u_c^2(y) = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \cdot u^2(u) + \left(\frac{\partial r}{\partial i} \right)^2 \cdot u^2(i)$.

Attention : ne pas confondre le « u » de l'incertitude-type donnant le « u^2 » de la variance avec le « u » de l'estimation de la tension mesurée.

- Dans le cas où les grandeurs d'entrées sont corrélées, l'expression convenable pour la covariance composée $u_c^2(y)$ associée à un résultat d'un mesurage est :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j)$$

Et, plus simplement :

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot u^2(x_2) + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot u(x_1, x_2) ; ; [\text{GUM 5.2.2}].$$

$$\text{Dans notre cas : } u_c^2(y) = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)^2 \cdot u^2(u) + \left(\frac{\partial r}{\partial i} \right)^2 \cdot u^2(i) + 2 \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial i} \cdot u(u, i).$$

Attention : ne pas confondre le « u » de l'incertitude-type donnant le « u^2 » de la variance avec le « u » de l'estimation de la tension mesurée.

Nous partons donc de la fonction suivante : $y = f(x_1, x_2)$ que nous allons réécrire sous une forme différente pour éviter certaines confusions dans ce qui va suivre : $y = f(a, b)$. Dans notre cas, il s'agit d'une fonction à deux variables, par exemple d'une première variable de tension « U » et d'une seconde variable de courant « I ».

- La variance composée est : $u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \cdot u^2(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \cdot u^2(b) ; [\text{GUM 5.1.1}].$

Prenons à présent une fonction à une valeur aléatoire x . On peut écrire les N valeurs que prend la variable aléatoire x (les valeurs x_i pour $i = 1, 2, \dots, N$) sous une forme matricielle (matrice ligne) :

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N)$$

Il est possible de décliner l'équation de la variance composée (ci-dessus) avec la définition de base d'une série statistique pour une fonction à une variable aléatoire x

dont on a calculé la moyenne estimée $\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i$; la variance est la moyenne des

carrés des écarts à cette moyenne : $v_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

Appelons la valeur moyenne estimée (espérance mathématique) \bar{x} de la fonction aléatoire de variable x par la notation $E(x)$, on a : $\bar{x} = E(x)$.

Appelons le facteur $\frac{1}{N}$ par la notation E , on a : $\frac{1}{N} = E$.

La variance devient : $v_x = E \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))^2$

Prenons toutes les valeurs qui sont les écarts à la moyenne $E(x)$, c'est-à-dire toutes les valeurs des différences $(x_i - E(x))$; on peut écrire toutes ces valeurs sous la forme d'une matrice ligne que l'on va appeler δx (la matrice des « delta ») :

$$\delta x = (x_1 - E(x) \quad x_2 - E(x) \quad \dots \quad x_N - E(x))$$

Pour exprimer une somme de N termes élevés au carré, habituellement notée $\sum_{i=1}^N (a_i)^2$

on peut l'écrire sous la forme d'un produit matriciel qui aura une forme très compacte : il suffit de multiplier une matrice ligne par sa matrice transposée ; on obtient la multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne qui donne comme résultat une somme des carrés de tous les éléments qui compose cette matrice.

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N)$$

Exemple : $A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^T = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2 = \sum_{i=1}^N (a_i)^2$$

La variance $v_x = E \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))^2$ peut à présent s'écrire sous la forme matricielle suivante : $v_x = E \cdot (\delta x \cdot \delta x^T)$; cette notation de la variance devient très compacte.

Reprenons la fonction $y = f(a, b)$ (dans notre cas $y = f(u, i) = r$) ; on peut établir que les variables a et b sont toutes les deux des variables aléatoires. En effet, les variables des mesures de tension u et de courant i sont aléatoires du fait que les appareils de mesure sont entachés d'incertitudes de mesure. Tout se passe comme si on ne mesurait jamais deux fois les mêmes valeurs, toutefois celles-ci convergent vers des moyennes estimées (espérances mathématiques).

Dans une fonction à deux variables aléatoires, si les variances respectives des variables aléatoires sont de faibles valeurs, alors la différentielle totale de cette fonction (c'est-à-dire la dérivée de cette fonction) égale la somme des dérivées partielles des variables de cette fonction.

Exemple : soit $f(x, y)$; $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Cette supposition de faible valeur de variance est usuelle pour les analyses d'incertitudes. En électronique, on peut considérer que les appareils de mesure utilisés dans un laboratoire de mesure sont tous d'une grande précision.

Pour notre fonction à deux variables aléatoires $y = f(a, b)$, on peut écrire les deux matrices des « delta » pour a et pour b (matrice des écarts des valeurs à la moyenne estimée de ces valeurs) :

$$\delta a = (a_1 - E(a) \quad a_2 - E(a) \quad \dots \quad a_N - E(a))$$

$$\delta b = (b_1 - E(b) \quad b_2 - E(b) \quad \dots \quad b_N - E(b))$$

Pour des variances faibles de a et de b de la fonction $y = f(a, b)$, la différentielle totale est la somme des dérivées partielles :

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \delta b. \text{ On remarquera que } \delta y, \delta a \text{ et } \delta b \text{ sont des matrices lignes.}$$

La variance de la fonction y , écrite sous la forme d'un produit d'une matrice et de sa transposée devient :

$$v_y = E \cdot (\delta y \cdot \delta y^T)$$

En écrivant à nouveau la différentielle totale de y , c'est-à-dire $\delta y = \frac{\partial f}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \delta b$ sous une forme explicite d'une multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne, on obtient :

$$\delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \quad \frac{\partial f}{\partial b} \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}$$

On remarquera que la matrice $\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}$ est en fait une matrice colonne dont les éléments qui la composent sont matrices lignes, c'est-à-dire une matrice de matrices ! Tout se passe comme si on avait une matrice de vecteurs.

En exprimant la variance de la fonction y de nouveau sous la forme explicite de matrices (avec la multiplication d'une matrice et de sa transposée), on obtient :

$$v_y = E \cdot \left[\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a} \quad \frac{\partial f}{\partial b} \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial a} \quad \frac{\partial f}{\partial b} \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right]^T \right]$$

Rappelons que : $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

En ce qui concerne la transposée d'une matrice de matrices, la transposée s'applique non seulement sur la matrice de matrices mais aussi sur tous les éléments matrices qui composent cette matrice de matrices. En d'autres mots, pour une matrice colonne C qui est composée des éléments matrices lignes A et B , la transposée C^T devient une matrice ligne dont les éléments qui la composent deviennent les matrices colonnes A^T et B^T . La matrice C^T devient en final une matrice carrée.

Un petit exemple vaut mieux qu'un long discours :

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T = (A^T \quad B^T)$$

avec : $A = (m \quad n)$ et $B = (p \quad q)$

on a : $C = \begin{pmatrix} (m \quad n) \\ (p \quad q) \end{pmatrix}$ qui devient : $C = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

or : $A^T = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ et $B^T = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

donc : $C^T = \left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right)$ qui devient : $C^T = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$

ce qui est parfaitement cohérent puisque : $C = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ et $C^T = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$

La variance de y : $v_y = E \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right]^T \right]$ devient donc :

$$v_y = E \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}^T \right] \right]$$

$$v_y = E \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} \delta a^T & \delta b^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}^T \right] \right]$$

$$v_y = E \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} \delta a^T & \delta b^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \right] \right]$$

La multiplication des matrices est associative. Le produit de matrices n'est pas commutatif. Mais le produit d'une matrice par un scalaire réel est commutatif uniquement en ce qui concerne ce scalaire réel. Ici, la valeur E est un scalaire réel puisque $E = \frac{1}{N}$.

$$v_y = E \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \cdot (\delta a^T \quad \delta b^T) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta b \end{pmatrix} \cdot (\delta a^T \quad \delta b^T) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \cdot \delta a^T & \delta a \cdot \delta b^T \\ \delta b \cdot \delta a^T & \delta b \cdot \delta b^T \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \cdot \delta a \cdot \delta a^T & E \cdot \delta a \cdot \delta b^T \\ E \cdot \delta b \cdot \delta a^T & E \cdot \delta b \cdot \delta b^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

Dans cette dernière équation de la variance v_y ci-dessus, les éléments de la matrice située au milieu du produit, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} E \cdot \delta a \cdot \delta a^T & E \cdot \delta a \cdot \delta b^T \\ E \cdot \delta b \cdot \delta a^T & E \cdot \delta b \cdot \delta b^T \end{pmatrix}$ expriment les variances des variables a et de b notées sous la forme d'un produit d'une matrice et de sa transposée :

$$v_a = E \cdot (\delta a \cdot \delta a^T) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (a_i - E(a))^2$$

$$v_b = E \cdot (\delta b \cdot \delta b^T) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (b_i - E(b))^2$$

Les éléments de cette matrice expriment aussi les valeurs des covariances des variables a et b entre elles.

$$v_{ab} = v_{ba} = E \cdot (\delta a \cdot \delta b^T) = E \cdot (\delta b \cdot \delta a^T) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (a_i - E(a)) \cdot (b_i - E(b))$$

On peut donc écrire l'équation de la variance de la fonction y sous la forme matricielle suivante :

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_a & v_{ab} \\ v_{ba} & v_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

On remarquera dans cette équation qu'il s'agit d'un produit de trois matrices dont la troisième est la transposée de la première. On arrive donc à une écriture vraiment très compacte en adoptant les notations matricielles suivantes :

$$C_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$C_x^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$U_x = \begin{pmatrix} v_a & v_{ab} \\ v_{ba} & v_b \end{pmatrix}$$

$v_y = C_x \cdot U_x \cdot C_x^T$ Expression de la propagation de la variance d'une fonction à variables aléatoires scalaires en utilisant la notation matricielle :

v_y représente la variance du *mesurande* (la grandeur de sortie) ;

C_x représente la matrice des coefficients de sensibilité des grandeurs d'entrée (dérivées partielles) ;

U_x représente la matrice de variance-covariance des grandeurs d'entrée ;

C_x^T représente la transposée de la matrice C_x .

Lorsque nous allons aborder la propagation de la variance pour des grandeurs vectorielles complexes nous allons utiliser la matrice de variance-covariance pour représenter l'incertitude sur des variables complexes.

Dans le cas d'une fonction de variables aléatoires scalaires qui sont indépendantes (non corrélées), les valeurs des covariances des variables a et b s'annulent : $v_{ab} = v_{ba} = 0$ et la matrice de variance-covariance devient :

$U_x = \begin{pmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_b \end{pmatrix}$ et seules les valeurs des variances des grandeurs d'entrée subsistent dans cette matrice.

Dans le cas où les valeurs scalaires d'entrée sont indépendantes (covariance nulle), la variance de la grandeur de sortie devient :

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

En effectuant la multiplication de ces trois matrices, étape par étape, on a :

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \cdot v_a & \frac{\partial f}{\partial b} \cdot v_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$$

$$v_y = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \cdot v_a + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \cdot v_b$$

En notant que les variances des grandeurs d'entrée et celle de la grandeur de sortie correspondent aux carrés des incertitudes-types, on retrouve bien la formule de la variance composée v_y (carré de l'incertitude-type composée : $u_c^2(y)$) ; [GUM 5.1.2].

$$v_y = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \cdot v_a + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \cdot v_b = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot v_{x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot v_{x_2} = u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot u^2(x_2)$$

Propagation de la variance pour des grandeurs vectorielles

En partant de l'équation suivante :

$$v_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} \text{ pour une fonction } y = f(a, b), \text{ dont le } \textit{mesurande } y$$

(grandeur de sortie) est une grandeur scalaire, nous voulons développer une expression pour un *mesurande* qui soit une grandeur vectorielle, c'est-à-dire dont la valeur de la (ou des) grandeur(s) est (sont) un (des) nombre(s) complexe(s).

Pour cela, nous devons redéfinir la fonction de mesure, à l'origine à variables scalaires $y = f(a, b)$, en une fonction à variables vectorielles. Pour simplifier la compréhension, nous choisirons une fonction dont les variables vectorielles comprennent uniquement deux variables. De même, chaque variable vectorielle comprend uniquement deux variables. Toutefois, on peut généraliser ce concept en choisissant une fonction à « M » variables vectorielles et dont les variables vectorielles comprennent « N » variables aléatoires.

Soit la fonction à variables vectorielles suivante que nous allons écrire sous la forme d'un vecteur colonne de vecteurs (matrice colonne dont les éléments sont des matrices lignes) :

$$y = f \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \text{ où les variables vectorielles sont :}$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

D'une façon similaire, le *mesurande* y peut s'écrire sous la forme d'un vecteur colonne :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Dans l'équation d'une fonction à variables scalaires, la matrice des coefficients de sensibilité des grandeurs d'entrée (dérivées partielles) prend la forme d'une matrice ligne. Dans le cas d'une fonction à variables vectorielles, cette matrice va prendre la forme d'une matrice dont la première ligne va être constituée des dérivées partielles de la première variable vectorielle et dont la deuxième ligne va être constituée des dérivées partielles de la seconde variable vectoriel. Dans le cas général, cette matrice aura une taille de M x N (M lignes de N colonnes).

Dans l'équation de la propagation de la variance à d'autres grandeurs, la valeur de la variance de y devient une matrice que l'on appelle la matrice de variance-covariance de la (des) grandeur(s) de sortie, c'est-à-dire du mesurande :

$$v_y = U_y = \begin{pmatrix} v_{y_1} & v_{y_1 y_2} \\ v_{y_2 y_1} & v_{y_2} \end{pmatrix}$$

La matrice de sensibilité des grandeurs d'entrées (dérivées partielles) prend la forme d'une matrice Jacobienne de la fonction f que l'on notera sous la forme J_f ou sous la forme contractée J :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

La transposée de la matrice Jacobienne J_f^T est une matrice dont on inverse les lignes et les colonnes, ou bien dont on miroite les éléments selon sa diagonale principale par rapport à la matrice J_f :

$$J_f^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

La matrice de variance-covariance des grandeurs d'entrée est :

$$U_x = \begin{pmatrix} v_{x_1} & v_{x_1 x_2} \\ v_{x_2 x_1} & v_{x_2} \end{pmatrix}$$

Et donc, l'équation de la propagation de la variance vectorielle à d'autres grandeurs est ceci :

$$v_y = U_y = \begin{pmatrix} v_{y_1} & v_{y_1 y_2} \\ v_{y_2 y_1} & v_{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{x_1} & v_{x_1 x_2} \\ v_{x_2 x_1} & v_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Cette équation s'écrit sous une forme très compacte en notation matricielle :

$U_y = J_f \cdot U_x \cdot J_f^T$ Expression de la propagation de la variance d'une fonction à variables aléatoires vectorielles en utilisant la notation matricielle.

Cette expression peut encore s'écrire sous une forme encore plus contractée :

$$v_y = J_f \cdot v_x \cdot J_f^T$$

v_y représente la matrice de variance-covariance du *mesurande* y de la grandeur de sortie ;

J_f représente la matrice Jacobienne des coefficients de sensibilité des grandeurs d'entrée (dérivées partielles) selon la fonction f définie ;

v_x représente la matrice de variance-covariance des grandeurs d'entrée x .

Voilà, c'était un peu long comme analyse, mais cela en valait le détour pour expliquer d'où vient cette formule. Cela nous a demandé quelques recherches pour bien comprendre le raisonnement et pour pouvoir vous l'expliquer d'une façon la plus simple possible, même si cela vous demande d'avoir quelques prérequis en « math sup ».

Voici enfin ce qui nous intéresse :

Propagation des incertitudes de mesure des paramètres S_{ij} vers les incertitudes de mesure de l'impédance sous test Z_D : $D_{\Delta S_{ij}} \rightarrow D_Z$

Rappel :

Le calcul de la dispersion de l'erreur des paramètres S_{ij} du VNA utilisé, c'est-à-dire la variance de type B s'établi comme suit pour un écart-type de 3σ (facteur d'élargissement $k = 3$) donnant un niveau de confiance de 99,73 % pour une loi normale (Gaussienne). La variance est le carré de l'écart-type.

$$D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{9} ; 3\sigma ; \text{niveau de confiance} = 99,73 \%$$

Pour un VNA HP 8753C, le niveau de confiance donné par le manuel est de 99,9 %, ce qui donne un facteur d'élargissement proche de 3,28 ; ($3,28^2 = 10,76$).

$$D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{10,76} ; 3,28\sigma ; \text{niveau de confiance} = 99,9 \%$$

La formule (longuement analysée ci-dessus) de la propagation de la variance d'une fonction à variables aléatoires vectorielles est :

$$v_y = J_f \cdot v_x \cdot J_f^T \quad (\text{Ridler \& Salter}) \text{ et } (\text{Dobbert \& Schrijver, Keysight Technologies})$$

On peut donc, à partir des équations ci-dessus, déterminer la dispersion (variance) sur la mesure de l'impédance : D_Z .

$$D_Z = J \cdot D_{\Delta S_{ij}} \cdot J^T$$

Hypothèses et simplifications sur les incertitudes de mesure du VNA

Lorsque nous avons procédé au calcul de l'incertitude maximale de mesure du VNA HP 8753C ($\Delta S_{ij \max}$), nous n'avons tenu compte que des erreurs sur le module de la grandeur complexe mesurée S_{ij} (*total magnitude error*). Les feuilles de calcul du manuel du VNA prévoient aussi une procédure pour le calcul de l'incertitude de mesure sur l'angle de phase de la grandeur mesurée. Dans l'analyse de l'incertitude de mesure que nous poursuivons, nous n'avons pas tenu compte de l'incertitude de phase et nous nous sommes uniquement basé sur le module de l'incertitude de mesure portant sur les paramètres S_{ij} . Cette incertitude a été modélisée sous la forme d'une fonction du second degré dont la variable est le paramètre S_{ij} sélectionné selon la méthode de mesure (*Shunt, Shunt-Thru ou Series-Thru*).

En toute rigueur, il y aurait lieu de tenir compte de l'incertitude de mesure sur la phase du paramètre S_{ij} mesuré par le VNA. Cette information pourrait dès lors être reportée dans la matrice de variance-covariance des grandeurs d'entrées pour que cette matrice soit définie d'une manière complète.

Dans le modèle d'analyse des incertitudes de mesure d'un VNA pour les mesures d'impédance selon trois méthodes, analyse décrite par Brian Walker dans la publication de la revue *Microwave&RF* et dans la publication de la société Copper Mountain Technologies à ce sujet, il apparaît que les incertitudes de mesure du VNA ne sont établies que sur le module des paramètres S_{ij} .

Après avoir effectué plusieurs simulations au moyen du logiciel SimSmith de AE6TY, nous nous apercevons que les incertitudes de mesure du VNA uniquement basées sur celle du module des paramètres S_{ij} donnent des résultats cohérents sur les incertitudes de mesure d'impédances selon les trois méthodes. Nous avons établi une comparaison de la simulation des courbes d'incertitude de mesure d'impédance au moyen d'un VNA avec celles qui ont fait l'objet de publications par des scientifiques. Nous avons constaté, à quelques minimes différences près, que les simulations effectuées sont également cohérentes avec le résultat des publications des scientifiques.

Que pouvons-nous en déduire ? On peut supposer que les incertitudes sur les mesures d'impédances selon les trois méthodes au moyen d'un VNA soient principalement fonction du module des incertitudes sur les paramètres S du VNA et que les incertitudes sur les mesures de la phase soient mineures par rapport à celles sur le module.

Cela serait-il bien vrai ? Ce sujet devrait dès lors être approfondi pour déterminer de façon complète l'incidence des incertitudes sur la mesure de phase et leur corrélation avec les incertitudes de mesure sur le module des grandeurs complexes mesurées.

Dans l'hypothèse que les incertitudes de mesure dues au VNA sur les paramètres S_{ij} soient basées uniquement sur le module de l'erreur totale maximale de l'appareil de mesure, la matrice de variance-covariance sur les valeurs d'entrée se résume à une grandeur scalaire réelle.

En effet : $D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \max}|^2}{9}$ est une grandeur scalaire réelle car le module d'un nombre complexe est un nombre réel pur.

Cela nous amène une grande simplification dans l'analyse de la propagation des incertitudes.

$D_Z = J \cdot D_{\Delta S_{ij}} \cdot J^T$ avec $D_{\Delta S_{ij}}$ scalaire réel. Comme un scalaire réel peut être commuté (à lui seul) dans un produit de matrices, on peut donc écrire :

$$D_Z = D_{\Delta S_{ij}} \cdot J \cdot J^T \text{ avec } D_{\Delta S_{ij}} \text{ scalaire réel.}$$

Que donne le produit d'une matrice d'un nombre complexe par sa transposée, c'est-à-dire ici $J \cdot J^T$?

La notation d'un nombre complexe sous une forme matricielle est la suivante :

$$z = a + jb \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$z = a + j0 \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$z = 0 + jb \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = i \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice d'un nombre complexe par sa transposée :

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$z^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$z \cdot z^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \cdot z^T = a^2 + b^2$$

$z \cdot z^T = z ^2$ pour z , nombre complexe
--

Donc :

$D_Z = D_{\Delta S_{ij}} \cdot J \cdot J^T \Leftrightarrow D_Z = D_{\Delta S_{ij}} \cdot J ^2$

Nous pouvons à présent calculer la dispersion (variance) sur la mesure de l'impédance Z_D selon les trois méthodes de mesure.

Config. n°1 : 1-Port S_{11} *Shunt* ; calcul de D_z

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{11}} = \frac{2 \cdot Z_0}{(1 - S_{11})^2} \text{ Shunt}$$

$$D_{\Delta S_{ij}} = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \text{ pour } 3\sigma$$

$$D_z = D_{\Delta S_{ij}} \cdot |J|^2$$

$$D_z = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \left| \frac{2 \cdot Z_0}{(1 - S_{11})^2} \right|^2 = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \frac{|2 \cdot Z_0|^2}{|(1 - S_{11})^2|^2}$$

$$D_z = 4 \cdot \frac{Z_0^2}{9} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{|1 - S_{11}|^4} \text{ Shunt pour } 3\sigma$$

Config. n°2 : 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* ; calcul de D_z

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = \frac{Z_0}{2 \cdot (1 - S_{21})^2} \text{ Shunt-Thru}$$

$$D_z = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \left| \frac{Z_0}{2 \cdot (1 - S_{21})^2} \right|^2 = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \frac{|Z_0|^2}{|2 \cdot (1 - S_{21})^2|^2}$$

$$D_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_0^2}{9} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{|1 - S_{21}|^4} \text{ Shunt-Thru pour } 3\sigma$$

Config. n°3 : 2-Ports S_{21} *Series* ; calcul de D_z

$$J = \frac{\partial Z_D}{\partial S_{21}} = \frac{-2 \cdot Z_0}{S_{21}^2} \text{ Series-Thru}$$

$$D_z = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \left| \frac{-2 \cdot Z_0}{S_{21}^2} \right|^2 = \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{9} \cdot \frac{|-2 \cdot Z_0|^2}{|S_{21}^2|^2}$$

$$D_z = 4 \cdot \frac{Z_0^2}{9} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \text{ max}}|^2}{|S_{21}|^4} \text{ Series-Thru pour } 3\sigma$$

Incertitude-type sur la mesure de Z_D : ΔZ_{\max}

L'incertitude-type, en d'autres mots l'écart-type, est la racine carrée de la variance (dispersion).

Attention : comme la variance sur la grandeur de sortie (D_z , dispersion sur la mesure de l'impédance) a été établie à partir de l'erreur totale maximale de la grandeur d'entrée ($\Delta S_{ij \max}$) pour un écart-type de 3σ (niveau de confiance de 99,73 %), le facteur d'élargissement « k » (le facteur de σ , ici $k = 3$ dans notre exemple de calcul pour 3σ) est déjà contenu dans la valeur de D_z . Dans le calcul de l'incertitude-type, il ne faut donc pas tenir compte une deuxième fois du facteur d'élargissement.

NDLR : il nous semble que dans les publications de Brian Walker (Microwave&RF et Copper Mountain Technologies), le facteur d'élargissement intervienne deux fois – ce qui est erroné – à la fin de l'analyse sur l'incertitude de la mesure d'impédance selon les trois méthodes. Cela se situe dans le passage de la variance D_z vers l'incertitude-type ΔZ_{\max} .

En d'autres mots, $\Delta Z_{\max} \neq 3 \cdot \sqrt{D_z}$.

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_z}$$

Config. n°1 : 1-Port S_{11} *Shunt* ; calcul de ΔZ_{\max}

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_z} = 2 \cdot \frac{Z_0}{3} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|1 - S_{11}|^2} \text{ Shunt pour } 3\sigma$$

Config. n°2 : 2-Ports S_{21} *Shunt-Thru* ; calcul de ΔZ_{\max}

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Z_0}{3} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|1 - S_{21}|^2} \text{ Shunt-Thru pour } 3\sigma$$

Config. n°3 : 2-Ports S_{21} *Series* ; calcul de ΔZ_{\max}

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_z} = 2 \cdot \frac{Z_0}{3} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|S_{21}|^2} \text{ Series-Thru pour } 3\sigma$$

Pour exprimer l'incertitude-type relative de la mesure de l'impédance en pourcents :

$$u [\%] = \frac{\Delta Z_{\max}}{Z_D} \cdot 100$$

Ceci permet de tracer un graphique de l'erreur de mesure de Z_D selon les trois méthodes.

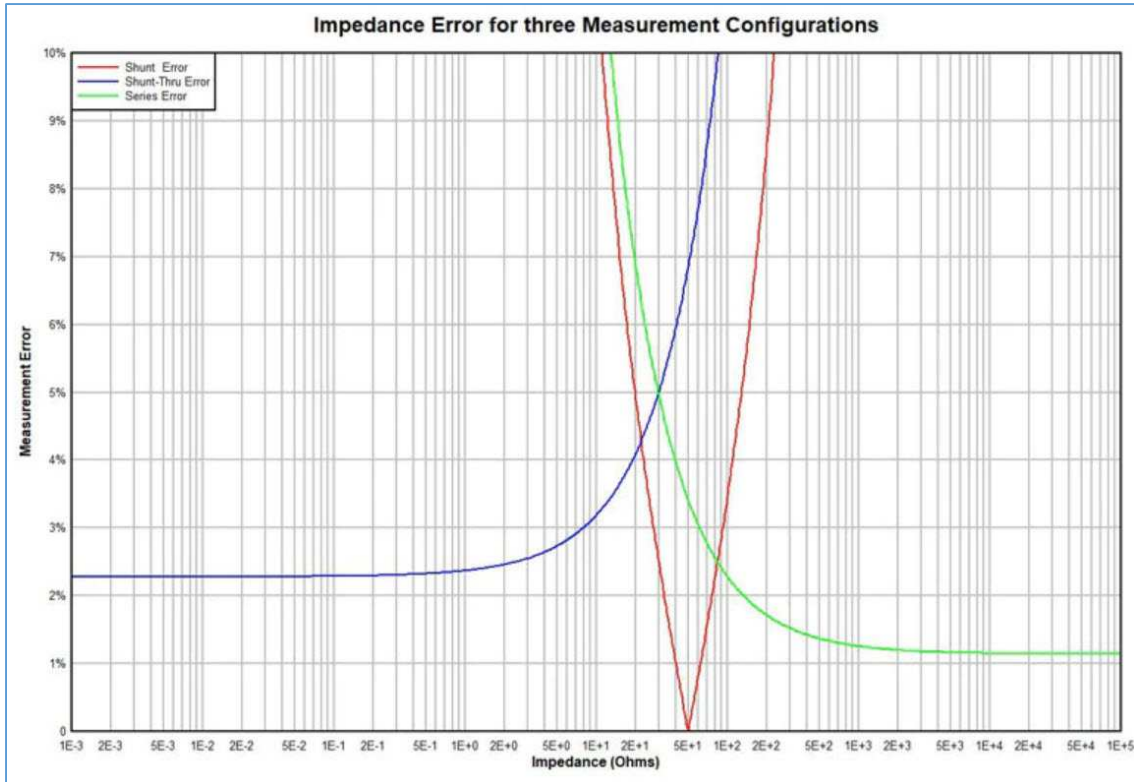


Fig. 42 : Graphique de l'erreur de mesure d'une impédance en fonction de la valeur de celle-ci et mesurée au moyen d'un VNA selon les trois méthodes de mesure *Shunt*, *Shun-Thru*, *Series-Thru*. Source : Make Accurate Impedance Measurements Using a VNA, Brian Walker : Senior RF Design Engineer at Copper Mountain Technologies ; Microwave&RF, 21 Juin 2019.

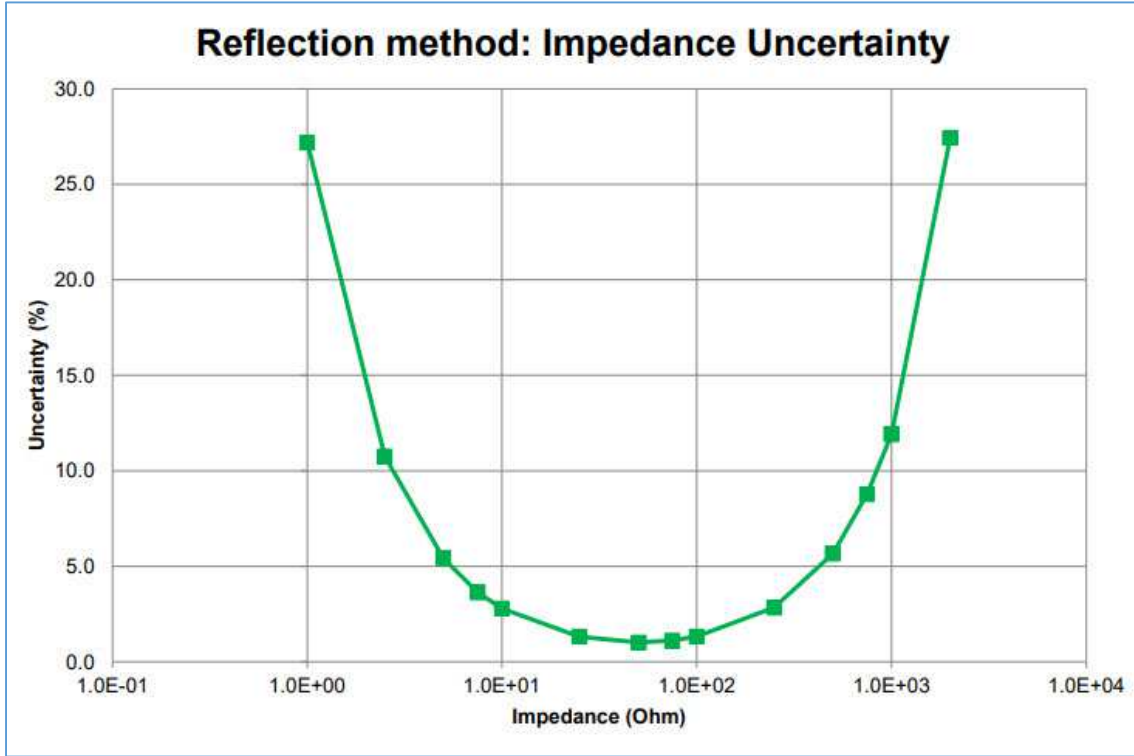


Fig. 43 : Idem que la figure précédente, mais uniquement pour la méthode *Shunt*. Source : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

3^{ème} partie : Simulation du degré de précision atteint lors de la mesure d'impédance selon les trois méthodes

Dans une vidéo tutorial intitulée *#95 Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko) décrit une application du logiciel SimSmith (AE6TY) pour évaluer les grandeurs mesurées par un VNA lorsqu'on utilise les trois méthodes de mesure d'une impédance : *Shunt*, *Shunt-Thru* et *Series-Thru*. Dans un bloc fonctionnel, on peut suivre l'évolution des paramètres S en fonction de la partie résistive et de la partie réactive d'une impédance sous test. Ainsi, on peut visualiser le module et l'argument (angle) des paramètres S en fonction de l'impédance du DUT. Nous avons encodé dans le logiciel SimSmith les paramètres qui sont décrits par W0QE dans son tutorial. Nous reproduisons ci-dessous l'agencement de la simulation ainsi que ses paramètres et lignes de syntaxe que nous avons encodés par nos propres soins. Dans un des deux blocs fonctionnels, nous avons rajouté le calcul du module et de l'argument de l'impédance sous test. D'autres ajoutes que nous avons apportées à cette application seront décrites plus loin.

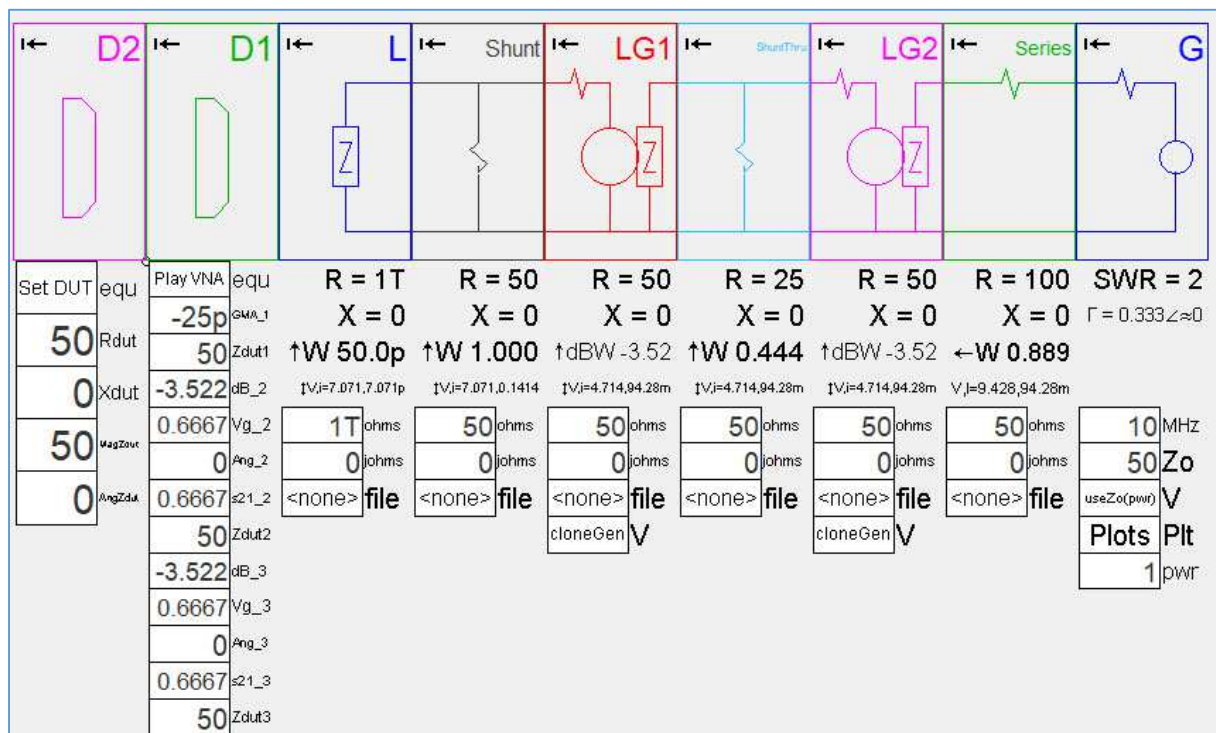
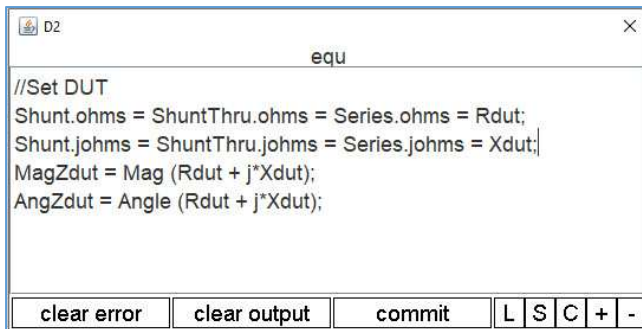


Fig. 44 : Agencement de l'application logicielle SimSmith (AE6TY) décrite par W0QE dans une vidéo tutorial. Source : *#95 Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Dans cet agencement, on retrouve trois simulations simultanées selon les trois méthodes de mesure.

Voici les syntaxes des différents blocs fonctionnels :

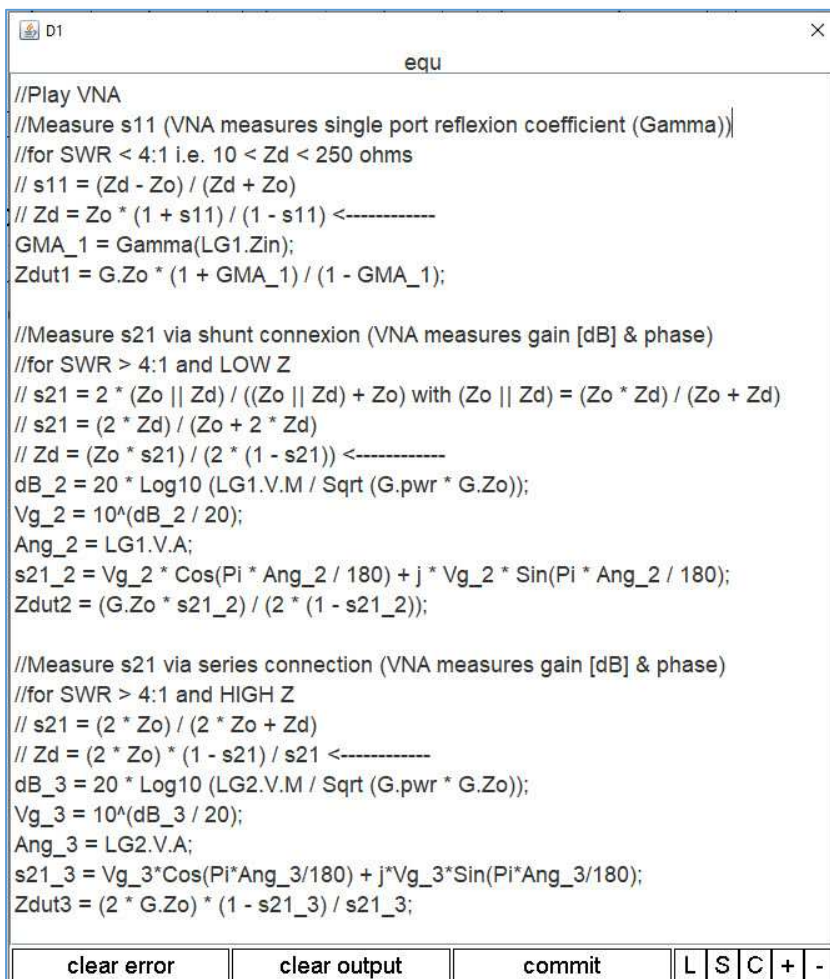
Bloc D2 : (nous y avons rajouté le calcul du module et de l'argument de l'impédance complexe de l'impédance du DUT).



```
//Set DUT
Shunt.ohms = ShuntThru.ohms = Series.ohms = Rdut;
Shunt.johms = ShuntThru.johms = Series.johms = Xdut;
MagZdut = Mag (Rdut + j*Xdut);
AngZdut = Angle (Rdut + j*Xdut);
```

Fig. 45 : Syntaxe du bloc fonctionnel D2 de l'application logicielle SimSmith (AE6TY) décrite par W0QE dans une vidéo tutoriel. Source : *#95 Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Bloc D1 : avec, entre autres, les mesures des paramètres S (module et argument) dans les trois méthodes de mesure d'impédance.



```
//Play VNA
//Measure s11 (VNA measures single port reflexion coefficient (Gamma))
//for SWR < 4:1 i.e. 10 < Zd < 250 ohms
// s11 = (Zd - Zo) / (Zd + Zo)
// Zd = Zo * (1 + s11) / (1 - s11) <-----
GMA_1 = Gamma(LG1.Zin);
Zdut1 = G.Zo * (1 + GMA_1) / (1 - GMA_1);

//Measure s21 via shunt connexion (VNA measures gain [dB] & phase)
//for SWR > 4:1 and LOW Z
// s21 = 2 * (Zo || Zd) / ((Zo || Zd) + Zo) with (Zo || Zd) = (Zo * Zd) / (Zo + Zd)
// s21 = (2 * Zd) / (Zo + 2 * Zd)
// Zd = (Zo * s21) / (2 * (1 - s21)) <-----
dB_2 = 20 * Log10 (LG1.V.M / Sqrt (G.pwr * G.Zo));
Vg_2 = 10^(dB_2 / 20);
Ang_2 = LG1.V.A;
s21_2 = Vg_2 * Cos(Pi * Ang_2 / 180) + j * Vg_2 * Sin(Pi * Ang_2 / 180);
Zdut2 = (G.Zo * s21_2) / (2 * (1 - s21_2));

//Measure s21 via series connection (VNA measures gain [dB] & phase)
//for SWR > 4:1 and HIGH Z
// s21 = (2 * Zo) / (2 * Zo + Zd)
// Zd = (2 * Zo) * (1 - s21) / s21 <-----
dB_3 = 20 * Log10 (LG2.V.M / Sqrt (G.pwr * G.Zo));
Vg_3 = 10^(dB_3 / 20);
Ang_3 = LG2.V.A;
s21_3 = Vg_3 * Cos(Pi * Ang_3 / 180) + j * Vg_3 * Sin(Pi * Ang_3 / 180);
Zdut3 = (2 * G.Zo) * (1 - s21_3) / s21_3;
```

Fig. 46 : Syntaxe du bloc fonctionnel D1 de l'application logicielle SimSmith (AE6TY) décrite par W0QE dans une vidéo tutoriel. Source : *#95 Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Générateur :

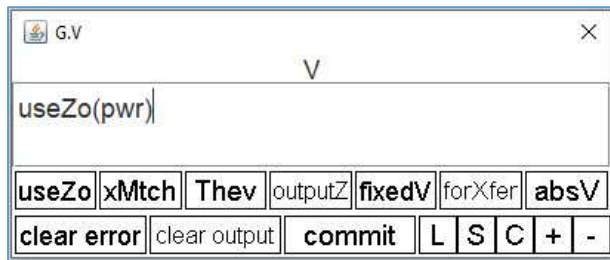


Fig. 47: Syntaxe du bloc générateur l'application logicielle SimSmith (AE6TY) décrite par W0QE dans une vidéo tutoriel. Source : #95 *Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Dans sa vidéo tutoriel, W0QE explique les maximalisations des variations observées dans les puissances transmises à la charge en fonction de la variation de l'impédance sous test selon les méthodes de mesure, cela pour des impédances élevées, pour des impédances faibles et pour des impédances proches de 50Ω . W0QE explique ainsi le choix des méthodes de mesure en fonction de l'ordre de grandeur de l'impédance sous test et en fonction du SWR.

Vers la fin de vidéo, W0QE mentionne la publication qui est parue sur ce sujet dans Microwave&RF et dont l'auteur est Brian Walker de la société Copper Mountain Technologies. C'est cette information qui a permis de démarrer nos recherches.

NDLR : W0QE fait remarquer une erreur de formule dans la publication Microwave&RF en ce qui concerne le calcul de l'impédance dans une configuration Series-Thru. Nous avons aussi relevé cette erreur lors de notre analyse mathématique qui a été largement décrite ci-dessus.

En fin de vidéo, W0QE tire les conclusions sur les erreurs de mesure d'une impédance avec un VNA en fonction des méthodes de mesure utilisées et en fonction de l'ordre de grandeur de l'impédance du DUT. Il mentionne que ces erreurs de mesures sont aussi fonction des incertitudes de mesure du VNA utilisé. Il s'appuie enfin sur le graphique que nous avons reproduit à la figure 42 (page 68) en montrant aussi que l'erreur de mesure est liée à la valeur du SWR.

Prolongements apportés par ON4IJ au tutoriel de W0QE

Nous avons repris les bases de l'application logicielle de W0QE sur le logiciel SimSmith (AE6TY) pour aller plus loin dans nos recherches afin de simuler la variation de l'incertitude de mesure d'une impédance, ici selon la méthode 1-Port *Shunt* à titre d'exemple. Nous avons ajouté un bloc fonctionnel « D3 » pour encoder toutes les formules mathématiques essentielles qui ont été décrites ci-dessus en ce qui concerne, entre autres, le calcul de la variance propagée à la mesure de Z_D à partir de la mesure des paramètres S par un VNA. Les incertitudes de mesure du VNA pour le paramètre S_{11} ont été encodées selon les calculs qui ont été établis pour un analyseur de réseau vectoriel HP 8753C avec un facteur d'élargissement « k » de 3,28 (c'est-à-dire pour $3,28\sigma$) correspondant à un niveau de confiance de 99,9 %.

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_Z} = 2 \cdot \frac{Z_0}{3,28} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|1 - S_{11}|^2} \text{ Shunt pour } 3,28\sigma \text{ (HP 8753C)}$$

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Z_0}{3,28} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|1 - S_{21}|^2} \text{ Shunt-Thru pour } 3,28\sigma \text{ (HP 8753C)}$$

$$\Delta Z_{\max} = \sqrt{D_Z} = 2 \cdot \frac{Z_0}{3,28} \cdot \frac{|\Delta S_{ij \max}|}{|S_{21}|^2} \text{ Series-Thru pour } 3,28\sigma \text{ (HP 8753C)}$$

$$|\Delta S_{11 \max}| = 0,0018 + 0,0542 \cdot |S_{11}| + 0,01888 \cdot |S_{11}|^2 \text{ Shunt (HP 8753C)}$$

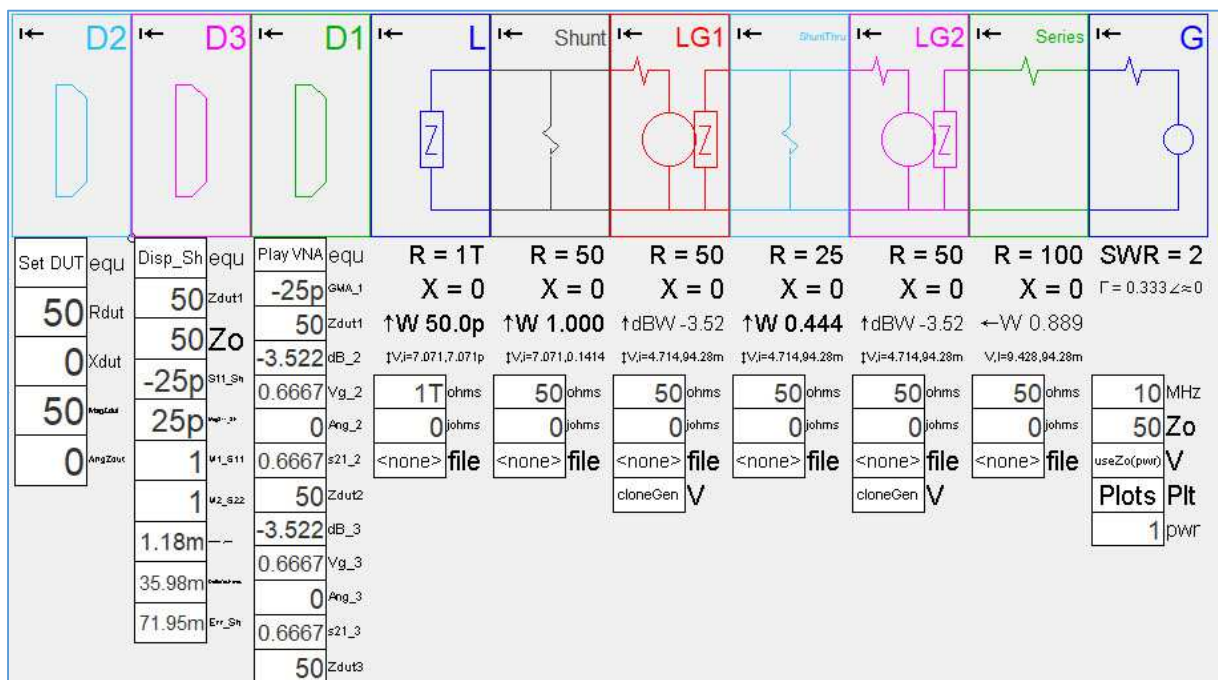


Fig. 48 : Agencement de l'application logicielle SimSmith (AE6TY) décrite par W0QE avec ajout du bloc fonctionnel D3 par ON4IJ. Source : W0QE et ON4IJ.

Bloc D3 : avec les incertitudes d'un VNA HP 8753C et la propagation de l'incertitude du paramètre S_{11} vers l'incertitude de la mesure de l'impédance Z_D

```

//Disp_Sh
Zdut1 = D1.Zdut1;
Zo = G.Zo;
S11_Sh = (Zdut1-Zo)/(Zdut1+Zo);
MagS11_Sh = Mag (S11_Sh);
M1_S11 = Mag (1-S11_Sh);
M2_S22 = M1_S11^2;

// maximum measurement error on S11 and specified for the VNA HP 8753C
MagDeltaS11_Shmax = 0.01888*(MagS11_Sh^2)+0.0542*MagS11_Sh+0.00118;

// Dispersion max on Zdut1 measurement based on 3,28 sigma (99,9% confidence interval) i.e. VNA HP 8753C
DeltaZdut1max = (2*Zo/3.28)*(MagDeltaS11_Shmax / M2_S22);

// maximum relative measuring error on Zdut1 expressed in %
Err_Sh = (DeltaZdut1max/(Mag(Zdut1)))*100;

```

Fig. 49 : Syntaxe du bloc D3 dans l'application logicielle SimSmith (AE6TY). Source : ON4IJ.

```

//Plots
plot D3.Err_Sh "Err" y1;
plot D3.MagDeltaS11_Shmax "S11Err" y2;

```

Fig. 50 : Syntaxe pour la fonction « Plot » dans l'application logicielle SimSmith (AE6TY). Source : ON4IJ.

Tout n'est pas parfait dans ce que nous avons encodé dans le bloc fonctionnel D3 et dans la fonction « Plot ». En effet, on devrait obtenir un graphique où l'axe des abscisses soit gradué en fonction du module de l'impédance complexe sous test.

Toutefois, en faisant varier uniquement la partie réelle de l'impédance sous test et en prenant cette grandeur pour l'axe des abscisses du graphique, on obtient une courbe de l'incertitude-type relative qui correspond à celle qui est attendue. Pour une incertitude de mesure inférieure à 10 %, les valeurs de Z_D sont comprises entre 5 Ω et 500 Ω et le minimum d'incertitude se trouve bien à la valeur 50 Ω .

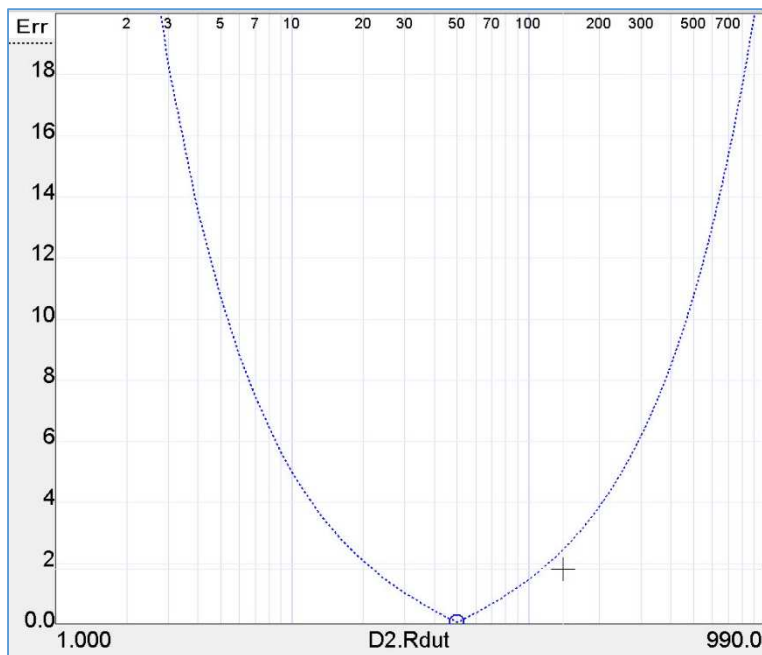


Fig. 51 : Graphique de l'incertitude relative sur la mesure d'une impédance selon la méthode de mesure *1-Port reflexion Shunt* dans l'application logicielle SimSmith (AE6TY). Cliché : ON4IJ.

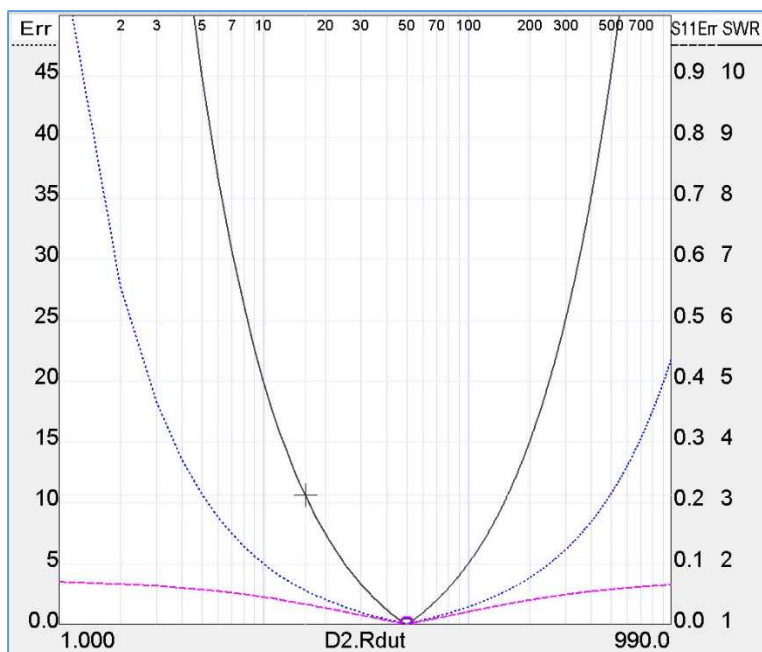


Fig. 52 : Idem figure ci-dessus avec en bleu l'incertitude relative sur la mesure d'une impédance, en noir le SWR présent au port 1 de mesure, en violet l'erreur totale sur le module de la mesure du paramètre S_{11} pour un VNA HP 8753C ($|\Delta S_{11 \max}|$), application logicielle SimSmith (AE6TY). Cliché : ON4IJ.

4^{ème} partie : Pratique de mesures illustrées au moyen d'un VNA HP 8753C

Set-up de mesure : dispositif d'essais (*Test Fixture*)

Set-up monté par W0QE Larry Benko : il s'agit de deux connecteurs type N femelles dont les plans de masse ont été soudés (brasés) ensemble en équerre, ce qui permet de raccorder un condensateur ou une bobine de self induction selon les trois méthodes de mesure. Pour la configuration *Shunt*, le composant est relié entre « A » et « C » ; pour la configuration *Shunt-Thru*, un fil conducteur est raccordé entre « A » et « B » et le composant est raccordé en ce fil et « C » ; pour la configuration *Series-Thru*, le composant est raccordé entre « A » et « B ».

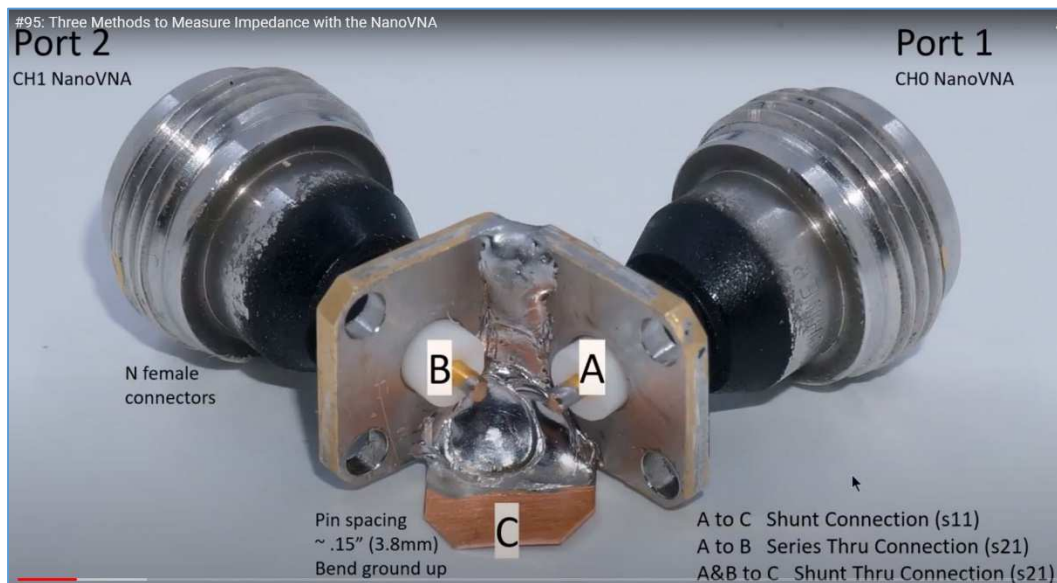


Fig. 53 : *Set-up* de mesure avec connecteurs Type N pour le raccordement d'un composant à mesurer selon les trois méthodes avec un VNA. Source : #95 *Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Pour des composants à montage de surface (SMD), W0QE utilise des connecteurs SMA femelles. Un deuxième *set-up* est fabriqué pour la méthode *Series-Thru* avec deux connecteurs SMA monté en tête-bêche. Cette disposition est mieux appropriée pour avoir des connexions aussi courtes que possible pour le raccordement d'un composant SMD en série avec la ligne de transmission.



Fig. 54 : *Set-up* de mesure avec connecteurs SMA pour le raccordement d'un composant à mesurer selon les trois méthodes avec un VNA. Source : #95 *Three Methods to Measure Impedance with the NanoVNA*, W0QE (Larry Benko), 2 Mars 2020.

Le *set-up* que nous avons utilisé pour des mesures selon la méthode Shunt n'est rien d'autre qu'un connecteur Type N à bride carrée sur lequel une cosse à souder a été fixée pour le raccordement du composant au plan de masse. Trois composants ont été mesurés : une bobine de 3 spires d'un diamètre de 8 mm et d'une longueur de 10 mm, un condensateur variable miniature de 2 - 22 pF réglé sur le maximum de sa valeur et un condensateur céramique Phillips de la série N750 et d'une capacité de 68 pF.

La plage de mesure paramétrée au VNA est de 50 MHz à 150 MHz ; la résolution de bande passante (RBW) a été paramétrée à 10 Hz ; l'affichage a été paramétré à 1601 points de mesure pour celui de l'abaque de Smith et pour une mesure du S_{11} . Trois marqueurs ont été placés respectivement aux fréquences 50 MHz, 100 MHz et 145 MHz. Un connecteur en « I » Type N mâle-mâle est raccordé sur le Port 1 de mesure. Un calibrage utilisateur 1-Port CAL SOL (Short-Open-Load) a été effectué dans ces conditions de mesure.



Fig. 55 : Calibres Open, Short, Load type N femelles (HP 85032B) et *set-up* de mesure Type N femelle. En bas, de gauche à droite : calibre « set-up Open » pour le réglage du plan de référence de mesure, une bobine de self-induction et un condensateur variable miniature. Photo : ON4IJ.

Lorsque le calibrage SOL du VNA est effectué pour la mesure du S_{11} avec l'affichage de l'abaque de Smith, on place le calibre « set-up Open » sur le port 1 de mesure et on règle le plan de référence de mesure en utilisant la fonction « Delay ». On ajuste le délai rajouté par le connecteur Type N (ici de 130 ps) de telle manière que l'on obtienne un point situé exactement sur l'axe des réels de l'abaque de Smith à son extrémité droite, ce qui signifie $R = \infty$, c'est-à-dire $Z = \infty \pm j0$.

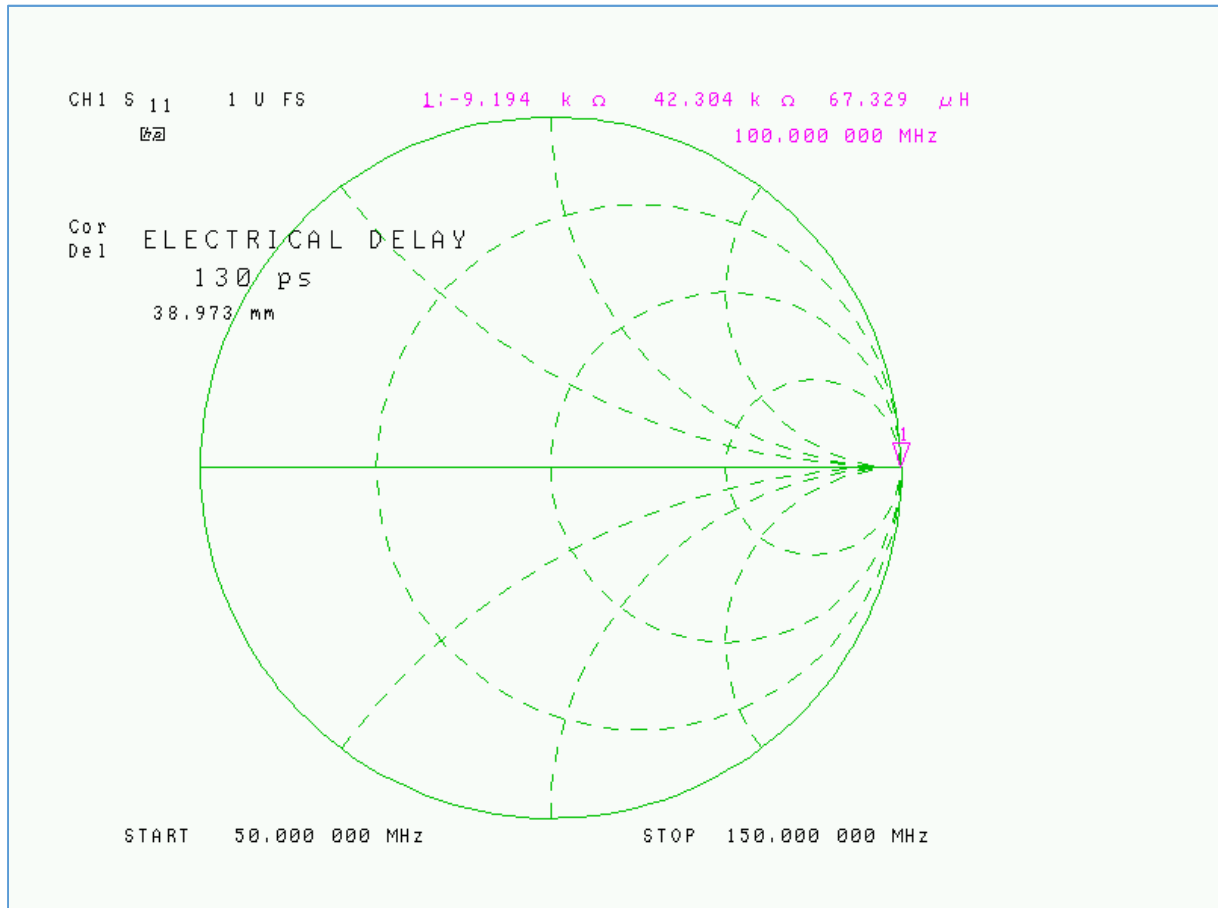


Fig. 56 : Réglage du plan de référence au port 1 de mesure avec le calibre « set-up Open ». Le délai est réglé pour obtenir un point (ici repéré par un marqueur 1) situé sur l'extrémité droite de l'axe des réels de l'abaque de Smith. Cliché : ON4IJ.

Une fois que le plan de référence est parfaitement réglé, on peut placer le composant raccordé sur exactement le même type de connecteur que celui qui a servi pour le calibre « set-up Open ».



Fig. 57 : Calibre « set-up Open » utilisé pour le réglage du plan de référence au port 1 de mesure. Photo : ON4IJ.



Fig. 58 : Bobine de self-induction raccordée sur le *set-up* de mesure. Photo : ON4IJ.

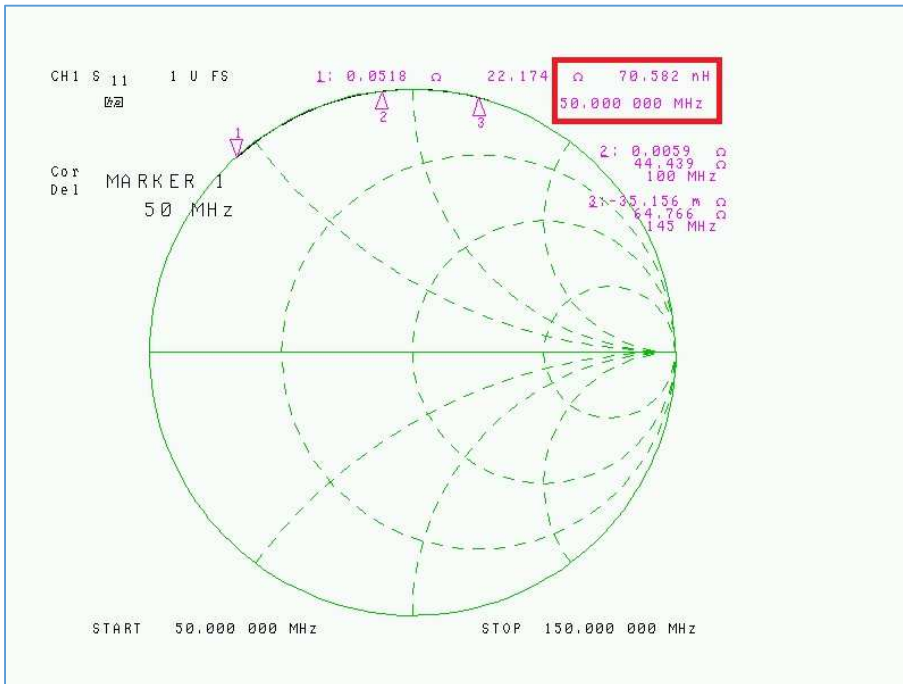


Fig. 59 : Mesure d'une bobine de self-induction. Le coefficient de self-induction mesuré est de 70,5 nH à la fréquence de 50 MHz. Cliché : ON4IJ.

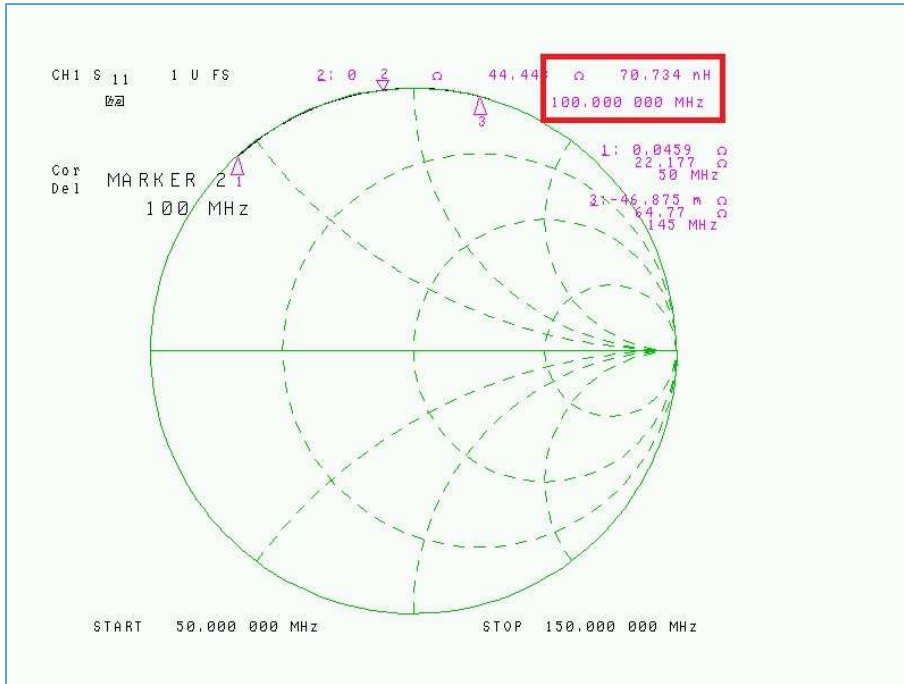


Fig. 60 : Mesure d'une bobine de self-induction. Le coefficient de self-induction mesuré est de 70,7 nH à la fréquence de 100 MHz. Cliché : ON4IJ.

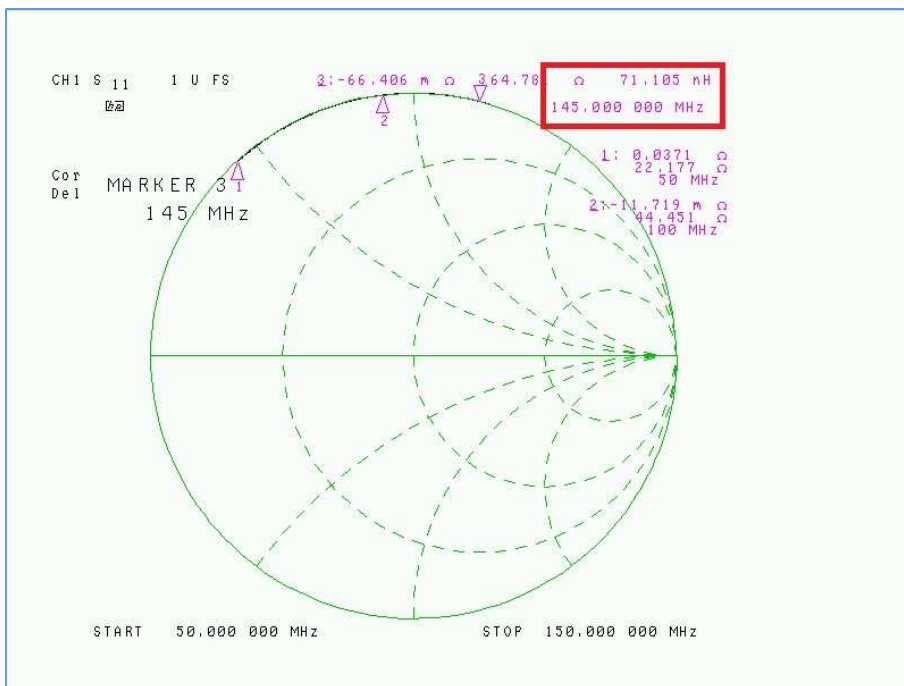


Fig. 61 : Mesure d'une bobine de self-induction. Le coefficient de self-induction mesuré est de 70,7 nH à la fréquence de 145 MHz. Cliché : ON4IJ.

Les mesures du coefficient de self-induction sont parfaitement cohérentes aux trois fréquences différentes. L'impédance de la bobine à 145 MHz est :

$$Z_L = 2\pi \cdot 145 \cdot 10^6 \cdot 70,7 \cdot 10^{-9} = 64,4 \Omega, \text{ ce qui est proche de } Z_0 = 50 \Omega \text{ et donne donc une excellente précision de mesure selon la méthode 1-Port } Shunt.$$

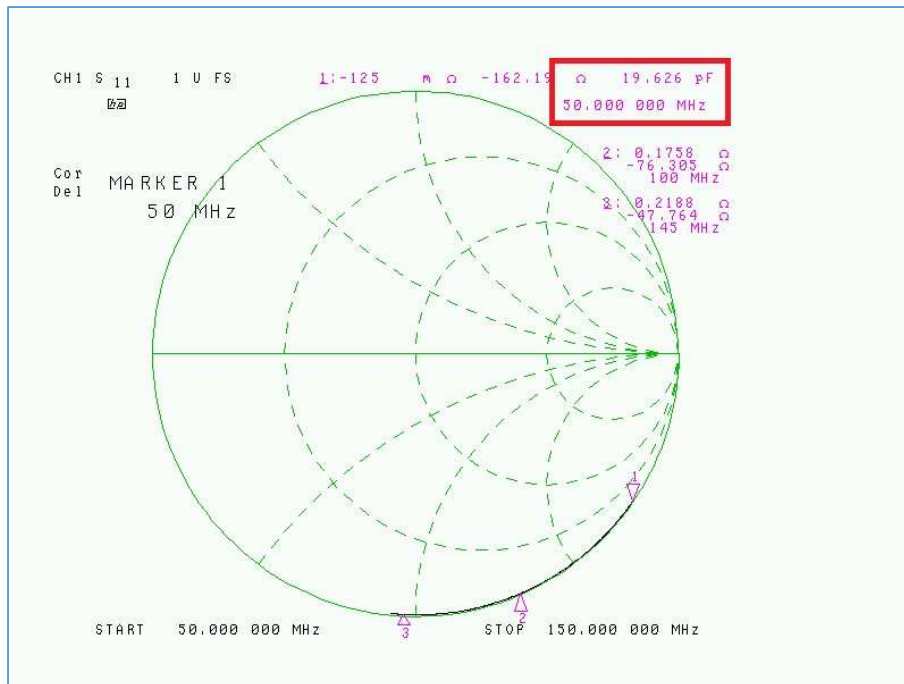


Fig. 62 : Mesure d'un condensateur variable miniature 2 - 22 pF. La capacité mesurée est de 19,6 pF à la fréquence de 50 MHz. Cliché : ON4IJ.

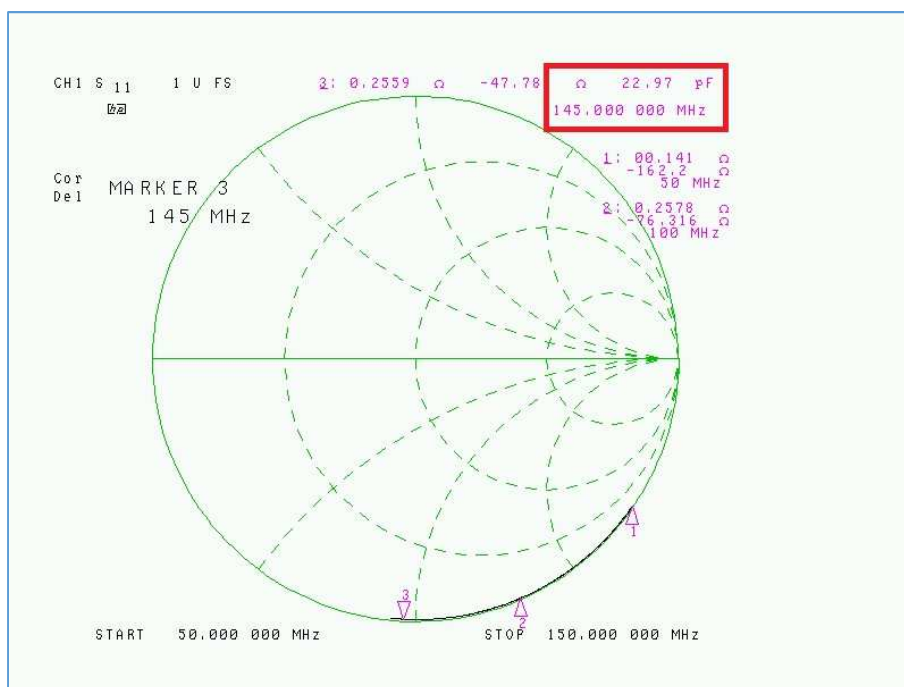


Fig. 63 : Mesure d'un condensateur variable miniature 2 - 22 pF. La capacité mesurée est de 22,97 pF à la fréquence de 145 MHz. Cliché : ON4IJ.

Les mesures de la capacité du condensateur sont parfaitement cohérentes aux deux fréquences différentes. L'impédance du condensateur à 145 MHz est :

$$Z_c = \frac{1}{2\pi \cdot 145 \cdot 10^6 \cdot 22,97 \cdot 10^{-12}} = 47,8 \Omega, \text{ ce qui est proche de } Z_0 = 50 \Omega \text{ et donne donc}$$

une excellente précision de mesure selon la méthode 1-Port *Shunt*.

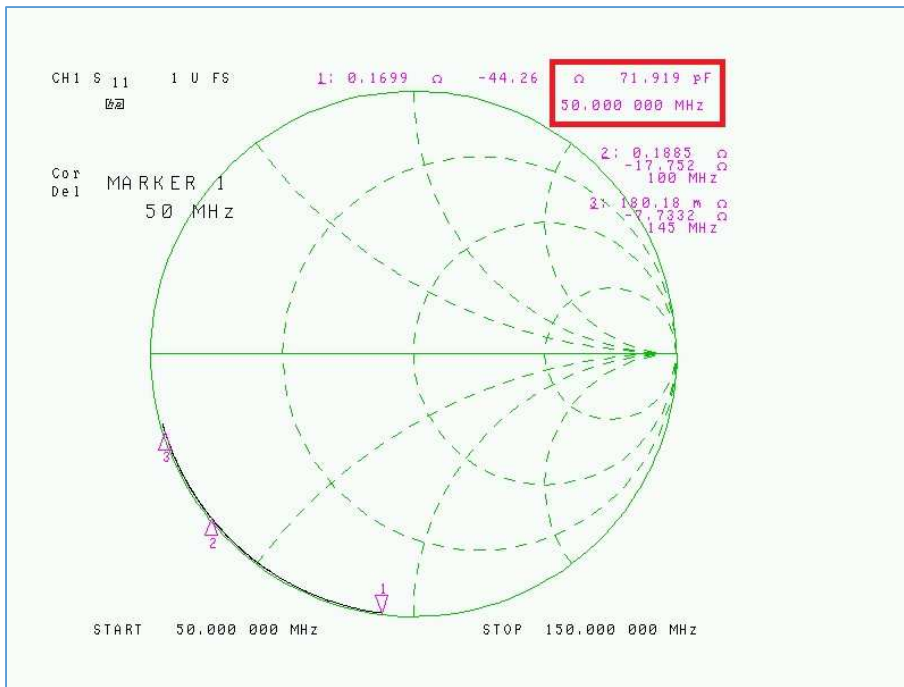


Fig. 64 : Mesure d'un condensateur céramique Phillips N750 de 68 pF. La capacité mesurée est de 71,9 pF à la fréquence de 50 MHz. Cliché : ON4IJ.

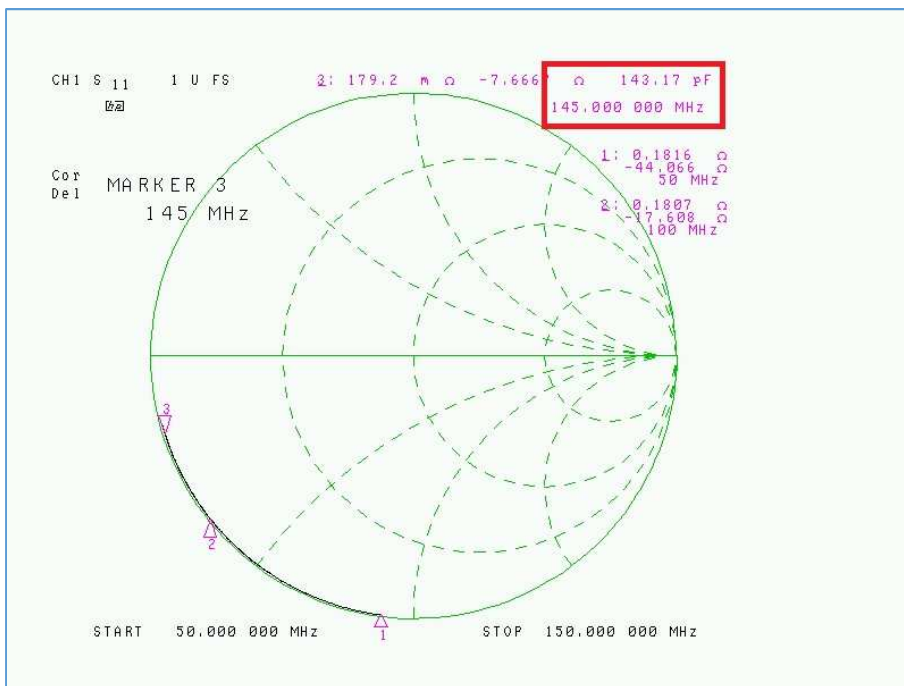


Fig. 65 : Mesure d'un condensateur céramique Phillips N750 de 68 pF. La capacité mesurée est de 143,2 pF à la fréquence de 145 MHz. Cliché : ON4IJ.

Les mesures de la capacité du condensateur sont très différentes aux deux fréquences. L'impédance du condensateur est :

$Z_C = 44,3 \Omega$ à 50 MHz et $Z_C = 7,6 \Omega$ à 145 MHz. La méthode 1-Port *Shunt* reste valable pour une précision inférieure à 10 % à 145 MHz. Toutefois, on constate que la capacité est bien excessive à cette fréquence pour ce type de condensateur.



Fig. 66 : Condensateur céramique Phillips N750 d'une capacité nominale de 68 pF raccordé sur le *set-up* de test. Photo : ON4IJ.

Plus la fréquence de mesure est élevée, et plus le condensateur va se comporter comme une véritable bobine de self-induction au-delà de sa fréquence de résonance. Certains constructeurs publient des graphiques de l'impédance du condensateur dans le domaine de la fréquence.

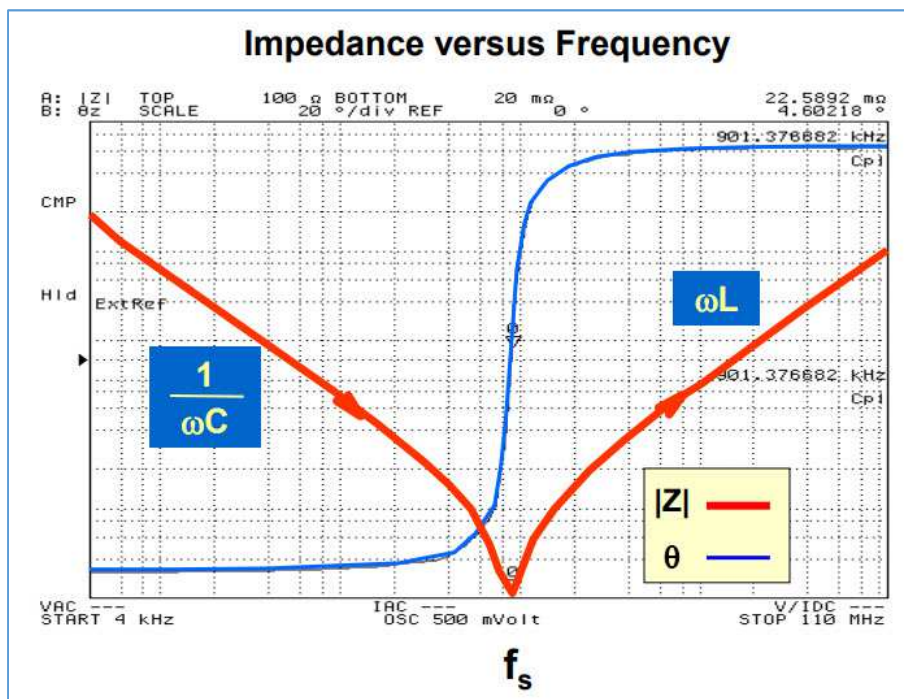


Fig. 66 : Exemple de la résonance d'un condensateur. Au-delà de « f_s », le condensateur se comporte comme une bobine d'induction. Source : Agilent, Challenges and solutions for Impedance measurements, Gustaaf Sutorius, Application Engineer ; Keysight, Idem, Guillaume Granet FE specialist.

Conclusions

Les mesures du coefficient de self-induction d'une bobine ou de la capacité d'un condensateur, pour des composants de faibles valeurs, peuvent être effectuées au moyen d'un analyseur de réseau vectoriel. Cet appareil permet d'effectuer ces mesures pour des fréquences très élevées, même jusqu'à plusieurs Giga-Hertz. Il y a lieu de choisir la méthode appropriée pour la mesure de ces composants en fonction de l'ordre de grandeur de leurs impédances dans la plage des fréquences prévues dans l'utilisation de ces composants électroniques.

Un VNA permet de prévoir le comportement de l'impédance d'un composant sur une large plage de fréquence et ainsi de déterminer celle de la self-résonance.

L'analyse de l'incertitude de mesure selon les trois méthodes, *1-Port Shunt*, *2-Ports Shunt-Thru* et *2-Ports Series-Thru* nous a conduit vers plusieurs recherches, entre autres, effectuer le calcul des paramètres S en fonction de l'impédance du DUT selon les trois méthodes de mesure, exprimer l'impédance du DUT en fonction des paramètres S, déterminer l'incertitude totale maximale d'un VNA sur la mesure des paramètres S, et enfin réaliser l'étude de la propagation des incertitudes sur les valeurs des grandeurs mesurées (grandeurs d'entrées : paramètres S) vers les incertitudes des grandeurs qui sont le résultat de la mesure (grandeurs de sortie : impédances mesurées).

Les recherches ainsi menées nous ont conduits à utiliser plusieurs outils mathématiques, comme par exemple les probabilités et la loi normale (Gaussienne) de distribution des variables aléatoires, le calcul des dérivées partielles et le calcul matriciel.

Une simulation au moyen du logiciel SimSmith a permis de montrer les résultats des calculs de l'incertitude de mesure selon la première méthode.

Des mesures réelles ont été effectuées sur quelques composants au moyen d'un VNA permettant ainsi de montrer que la pratique confirme la théorie et qu'il y a moyen d'effectuer des mesures avec une grande précision, en particulier pour les bobines de self-induction et pour des condensateurs appropriés à des applications en VHF.

Enfin, pour un radioamateur, il y a moyen d'utiliser un VNA d'un prix abordable, comme par exemple un mini VNA, un nano VNA ou un VNA performant acquis en seconde main.